

HAUPTAUFSÄTZE

Über die Teststärke des Fisherschen Testes

Von Hans Richter in Haltingen, Kreis Lörrach

Bei festen Marginalien einer 2×2 -Tafel, die das Ergebnis der Anwendung zweier Bearbeitungsverfahren widerspiegelt, und bei Vorgabe einer Signifikanzschranke α für die Anwendung des Fisherschen Testes ist die Teststärke P_{ξ} allein abhängig von einem Parameter ξ , der die Überlegenheit des neuen Bearbeitungsverfahrens über das alte charakterisiert. Der Test besitzt einen zu α gehörigen Unempfindlichkeits- ξ -Bereich $0 \leq \xi \leq \xi_0$. Für P_{ξ} und ξ_0 werden Formeln abgeleitet, die für große Werte der Marginalien einfache Approximationen gestatten. Jedoch ist auch für kleine Werte der Marginalien die Approximation für ξ_0 noch ausreichend.

Considering a 2×2 table with fixed marginal totals showing the result if two different ways of treatment are applied, and assigning a significance level α for the Fisher test, the power of the test P_{ξ} depends upon a single parameter ξ characterizing the superiority of the new treatment to the old one. The test has a ξ -range of insensibility $0 \leq \xi \leq \xi_0$ due to α . Formulae are derived that permit simple approximations for large values of the marginal totals. Yet, the approximation for ξ_0 is sufficient even for small values of the marginal totals.

Soit donné une 2×2 -table aux marginales fixes, qui représente le résultat de l'application de deux procédés différents, et une borne de signification α pour l'application du test de Fisher; alors la force du test P_{ξ} dépend d'un seul paramètre ξ , qui est caractéristique pour la supériorité du procédé nouvel en comparaison du vieux. Il y a un interval d'insensibilité $0 \leq \xi \leq \xi_0$ pour le test, dépendant de α . On dérive des formules pour P_{ξ} et ξ_0 qui permettent des approximations simples, quand les valeurs des marginales sont grandes. Cependant cette approximation est encore suffisante pour ξ_0 , quand les valeurs des marginales sont petites.

При данных маргиналиях некоторой 2×2 -таблицы, в которой представлены результаты применения двух методов обследования, и при заданных граничных значениях α для критерия Фишера вероятность P_{ξ} зависит только от одного параметра ξ , характеризующего преимущество нового метода обследования над старым. Вероятности P_{ξ} соответствует область нечувствительности $0 \leq \xi \leq \xi_0$, зависящая от α . Выводятся формулы для P_{ξ} и ξ_0 , которые при больших значениях маргиналий допускают простые аппроксимации. Однако для ξ_0 эта аппроксимация достаточно точна и в случае маленьких значений маргиналий.

§ 1. Problemstellung

Bei der Anwendung des Bearbeitungsverfahrens (resp. der Heilmethode o. ä.) A auf m vor dem Experiment ununterscheidbare Individuen einer Gesamtheit möge sich bei a Stück ein Erfolg und bei $c = m - a$ ein Mißerfolg zeigen. Dagegen liefere die Anwendung des Verfahrens B auf n Individuen b Erfolge und $d = n - b$ Mißerfolge, so daß sich die Tafel 1 ergibt.

Tafel I

	Erfolg	Miß- erfolg	total
A	a	c	m
B	b	d	n
total	r	s	N

Hierbei sei die Bezeichnung so gewählt, daß $b/n \geq a/m$ ist, so daß eine scheinbare Überlegenheit der Methode B erscheint. Zur Prüfung der Nullhypothese H_0 , daß A und B aber in Wahrheit identisch sind, wird beim Fisherschen Test die Wahrscheinlichkeit $P(m, n, r; a)$ dafür aufgestellt, daß bei vorgegebenen Marginalien m, n und r die vorstehende durch den Wert von a festgelegte Belegung der 2×2 -Tafel nur durch zufällige Verteilung der insgesamt r Erfolge und s Mißerfolge auf die beiden Zeilen der Tafel entstanden ist. Offenbar ist

$$P(m, n, r; a) = \frac{\binom{r}{a} \binom{s}{c}}{\binom{N}{m}} = \frac{\binom{m}{a} \binom{n}{r-a}}{\binom{N}{r}} \dots \dots \dots (1).$$

Bei Vorgabe einer Signifikanzschranke α wird nun ein $a_0(m, n, r, \alpha)$ möglichst groß so bestimmt, daß

$$\sum_{a \leq a_0} P(m, n, r; a) \leq \alpha$$

ist („einseitiger Test“) und die Nullhypothese nur dann verworfen, wenn das beobachtete $a \leq a_0$ ist.

α ist die Wahrscheinlichkeit dafür, daß H_0 verworfen wird¹⁾, obwohl H_0 richtig ist; α ist also eine Irrtumswahrscheinlichkeit. Ein Irrtum bei Anwendung des Tests ist aber auch dann gegeben, wenn H_0 falsch ist, aber trotzdem nicht verworfen wird. Nehmen wir zur Beurteilung dieser Irrtumswahrscheinlichkeit an, daß wir die Überlegenheit von B über A durch einen stetigen Parameter ξ charakterisieren können, so daß $\xi = 0$ Gleichwertigkeit, $\xi > 0$ Überlegenheit von B und $\xi < 0$ Unterlegenheit von B bedeutet²⁾. Weiter sei ξ so beschaffen, daß die Wahrscheinlichkeit, daß $a \leq a_0$ wird, bei festen Werten von m, n, r und α nur noch von ξ abhängt. Dann wächst diese Wahrscheinlichkeit P_ξ naturgemäß monoton mit ξ , so daß sich schematisch der in Bild 1 gezeigte Verlauf ergibt. Definitionsgemäß ist $P_{\xi=0} = \alpha$.

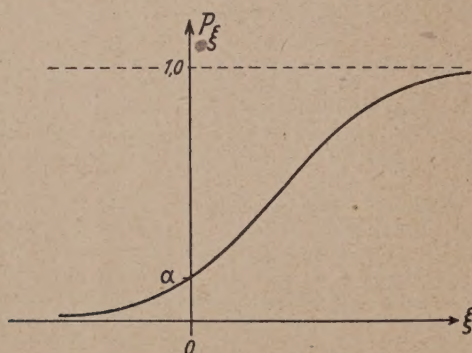


Bild 1. Teststärke

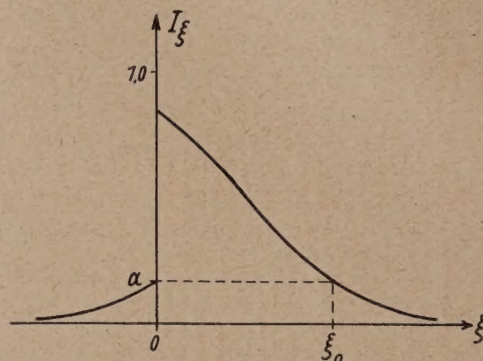


Bild 2. Irrtumswahrscheinlichkeit

Entsprechend zu der oben definierten „Einseitigkeit“ des Testes präzisieren wir jetzt H_0 zu der Hypothese, daß B nicht überlegen ist, daß also $\xi \leq 0$ gilt. Mit der Wahrscheinlichkeit P_ξ wird nun H_0 verworfen, was im Bereich $\xi > 0$ zu Recht geschieht, für $\xi \leq 0$ aber einen Irrtum darstellt. Damit ergibt sich für jedes ξ eine Irrtumswahrscheinlichkeit I_ξ für die Begehung eines Irrtums bei Anwendung des Tests, die von Bild 1 zu Bild 2 führt; nämlich

$$I_\xi = P_\xi \quad \text{für} \quad \xi \leq 0,$$

$$I_\xi = 1 - P_\xi \quad \text{für} \quad \xi > 0.$$

Hat man α sehr klein gewählt, so wird die Irrtumswahrscheinlichkeit für die den Wert Null nur wenig überschreitenden ξ sehr groß; d. h. nur große Werte von ξ , also starke Überlegenheit von B über A , kann genügend sicher erkannt werden. Dafür ist aber die Irrtumswahrscheinlichkeit im Bereiche $\xi < 0$ sehr klein, und dies ist für die Praxis entscheidend, da auf jeden Fall vermieden werden muß, daß man auf Grund des Testes fälschlich auf eine Überlegenheit von B schließt. Je sicherer man also darin gehen will, ein schlechteres B nicht irrtümlich als besser zu beurteilen, desto größer muß die Überlegenheit von B sein, um überhaupt erkannt zu werden. Die zur Beurteilung dieser Verhältnisse maßgebliche Funktion P_ξ wird daher „Teststärke“ (engl. power of the test) genannt.

Betrachten wir nun wieder Bild 2, so sehen wir, daß es genau ein $\xi_0 > 0$ gibt, für das wieder I_ξ den Wert α annimmt. Die ξ außerhalb des Intervalles $0 < \xi < \xi_0$ werden also durch den Test mindestens mit der gleichen Sicherheit erkannt, mit der man den Test durch Vorgabe von α zur Anwendung bringt. Dagegen ist der Test für die ξ innerhalb dieses Intervalls vom Standpunkt des vorgegebenen α aus als unempfindlich zu betrachten. Wir nennen daher ξ_0 die „Empfindlichkeitsschranke“ und das Intervall $0 < \xi < \xi_0$ den „Unempfindlichkeitsbereich“. ξ_0 ist natürlich eine Funktion der Marginalien und von α ; d. h. $\xi_0 = \psi(m, n, r; \alpha)$. Oft wird man in praktischen Fällen auf die Kenntnis des Verlaufs von P_ξ verzichten und sich dafür mit der Angabe von ξ_0 begnügen können.

¹⁾ Wegen der Diskontinuität von a sei α so gewählt, daß genau $\sum_{a \leq a_0} P(m, n, r; a) = \alpha$ wird.

²⁾ Ein ξ mit den genannten Eigenschaften wird in § 3 angegeben werden.

Gehen wir bei festen Marginalien von einem α zu einem $\alpha' > \alpha$ über, so liegt die entsprechende Kurve P'_ξ überall oberhalb von P_ξ , damit also I'_ξ für die $\xi > 0$ stets unterhalb von I_ξ . Wir haben also:

$$I'_{\xi_0} < I_{\xi_0} = \alpha$$

und

$$\alpha' = I'_{\xi'_0} < I_{\xi'_0}.$$

Ist nun $\alpha = \kappa(m, n, r; \xi_0)$ die monoton mit wachsendem ξ_0 fallende Umkehrfunktion von $\varphi(m, n, r; \alpha)$, so wird:

$$I_{\xi_0} > \kappa(m, n, r; \xi'_0)$$

und

$$I'_{\xi'_0} < \kappa(m, n, r; \xi_0),$$

wofür wir auch schreiben können:

$$\begin{aligned} I_\xi &> \kappa(m, n, r; \xi), & \text{falls } \xi < \xi_0, \\ I_\xi &< \kappa(m, n, r; \xi), & \text{falls } \xi > \xi_0. \end{aligned}$$

Diese Abschätzungen können bei Unkenntnis von P_ξ als Ersatz benutzt werden.

Unsere Aufgabe besteht nun darin, einen Parameter ξ mit den oben geforderten Eigenschaften als Maß für die Überlegenheit von B über A zu finden und dann P_ξ und ξ_0 zu berechnen.

§ 2. Das Modell der Grundanzahlen

Geht man von der in § 1 angegebenen kombinatorischen Vorstellung für die Konstruktion des Fisherschen Testes aus, und will man nun eine verschiedene Wirksamkeit der Verfahren A und B in Rechnung stellen, so ist klar, daß man nicht mehr die r Erfolge beliebig auf die beiden Zeilen der Tafel verteilen kann. Es kann ja vorkommen, daß ein Individuum, das bei B Erfolg zeigte, bei A einen Mißerfolg liefert. E. S. Pearson und M. Merrington³⁾ haben daher die angegebene Konzeption dahingehend verallgemeinert, daß angenommen wird, daß unter den N Individuen einige mit den Grundanzahlen

X sowohl bei A , als auch bei B ,
 W bei A , aber nicht bei B ,
 Y bei B , aber nicht bei A ,
 Z weder bei A , noch bei B

einen Erfolg liefern. An die Stelle der obigen 2×2 -Tafel tritt daher eine 2×4 -Tafel (vgl. Tafel 2), aus der Tafel 1 vermöge

Tafel 2

	A B	A nicht B	nicht A B	nicht A nicht B	total
A	x_1	w_1	y_1	z_1	m
B	x_2	w_2	y_2	z_2	n
total	X	W	Y	Z	N

$a = x_1 + w_1, b = x_2 + y_2, c = y_1 + z_1, d = w_2 + z_2, r = X + w_1 + y_2, s = Z + y_1 + w_2$, durch Konzentration entsteht. Pearson und Merrington haben dabei zur Vereinfachung $W = 0$ angenommen, so daß die Nullhypothese einfach $Y = 0$ wird. Entsprechend wird Tafel 2 zu einer 2×3 -Tafel. Zu vorgegebenen Werten von X und Y gehört dann eine Menge von 2×3 -Tafeln, die je durch x_1 und y_1 festgelegt werden und deren zugehörige konzentrierte 2×2 -Tafeln entweder durch den Test verworfen werden oder nicht. Die Summe der Wahrscheinlichkeiten aller zur Verwerfung führenden 2×3 -Tafeln liefert eine Funktion $P(X, Y)$, die die Teststärke angibt und die für einige Fälle berechnet wurde.

Der Nachteil dieser Betrachtungsweise liegt auf der Hand:

1. An die Stelle einer charakteristischen Größe ξ treten 2, im allgemeinen Falle $W \neq 0$ sogar 3.

2. Die verwendeten Parameter sind prinzipiell nicht aus einem Experiment zu ermitteln, da stets nur die 2×2 -Tafel beobachtet werden kann.

Der praktische Wert von $P(X, Y)$ ist daher ein beschränkter; immerhin erhält man Anhaltspunkte z. B. für die Mindestgröße von N , die zur Entscheidung mit Hilfe des Tests im praktischen gegebenen Falle notwendig ist.

³⁾ E. S. Pearson und M. Merrington, 2×2 tables. The power function of the test on a randomized experiment. Biometrika 35, S. 331—345 (1948).

§ 3. Das Modell der Grundwahrscheinlichkeiten

Bekanntlich ist es möglich, den Fisherschen Test abweichend von § 1 in einer anderen Weise zu begründen, die zunächst als umständlicher erscheint, deren Verallgemeinerung aber zu einfachen Resultaten führen wird. Hierzu nehmen wir an, daß die beiden als identisch vorausgesetzten Bearbeitungsverfahren A und B bei jedem der vorgelegten Individuen mit der Wahrscheinlichkeit p zum Erfolg führen. Unter Vorgabe von m und n , nicht aber von r , ist dann die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung der Tafel 1:

$$P(a, b, c, d) = \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} \cdot p^r \cdot (1-p)^s \cdot \dots \quad (2).$$

Die Wahrscheinlichkeit $Q(r)$, daß dabei gerade die Marginalie r entsteht, wird also:

$$Q(r) = \sum_{a+b=r} P(a, b, c, d) = p^r \cdot (1-p)^s \cdot \sum_a \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} = p^r \cdot (1-p)^s \cdot \binom{N}{r} \quad (3).$$

Aus (2) und (3) erhalten wir durch Division sofort die Wahrscheinlichkeit $P(m, n, r; a)$ für die Entstehung der Tafel 1 bei Festlegung aller Marginalien:

$$P(m, n, r; a) = \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} / \binom{N}{r},$$

was ersichtlich mit (1) übereinstimmt. Im Gegensatz zu § 1 ist aber hier die völlige Identität von A mit B gar nicht notwendig, sondern nur die Übereinstimmung der zugehörigen Erfolgswahrscheinlichkeiten.

Nehmen wir nun allgemeiner an, daß A und B die resp. Erfolgswahrscheinlichkeiten p_A und p_B haben, so wird entsprechend bei vorgegebenen Werten von m und n :

$$P(a, b, c, d) = \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} p_A^a (1-p_A)^{m-a} p_B^b (1-p_B)^{n-b} \cdot \dots \quad (4).$$

Hieraus ergibt sich dann:

$$Q(r) = \sum_{a+b=r} P(a, b, c, d) = (1-p_A)^m \cdot (1-p_B)^n \cdot \left(\frac{p_B}{1-p_B} \right)^r \cdot \sum_a \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} \left(\frac{p_A \cdot (1-p_B)}{p_B \cdot (1-p_A)} \right)^a \cdot \dots \quad (5).$$

Wir führen nun den Parameter ξ ein durch die Gleichung

$$e^\xi = \frac{p_B}{1-p_B} \cdot \frac{p_A}{1-p_A} \cdot \dots \quad (6).$$

ξ hat in der Tat die Eigenschaft, daß es die Überlegenheit von B über A charakterisiert: $\xi = 0$ gilt bei $p_A = p_B$, $\xi > 0$ bei $p_B > p_A$ und $\xi < 0$ bei $p_B < p_A$. Bild 3 gibt in einem $p_A - p_B$ -Diagramm die Hyperbeln konstanter Überlegenheit an.

Aus (4) und (5) erhalten wir nun leicht die Wahrscheinlichkeit $P(m, n, r; a; \xi)$, daß bei der Überlegenheit ξ und den Marginalien m, n und r gerade die Belegung der Tafel 1 entsteht:

$$P(m, n, r; a; \xi) = \frac{P(a, b, c, d)}{Q(r)},$$

also

$$P(m, n, r; a; \xi) = \frac{\binom{m}{a} \binom{n}{r-a} e^{-a\xi}}{\sum_a \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} e^{-a\xi}} \quad (7).$$

Hieraus ergibt sich weiter bei Vorgabe der Signifikanzschranke α , resp. des zugehörigen $a_0(m, n, r, \alpha)$, gemäß § 1 die Teststärke:

$$P_\xi(m, n, r; \alpha) = \sum_{a \leq a_0(m, n, r, \alpha)} \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} e^{-a\xi} / \sum_a \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} e^{-a\xi} \cdot \dots \quad (8).$$

Wir sehen, daß in der Tat, wie gefordert, bei Vorgabe von m, n, r und α die Teststärke allein von ξ abhängt, das seinerseits von den Marginalien unabhängig ist. Wir haben somit das

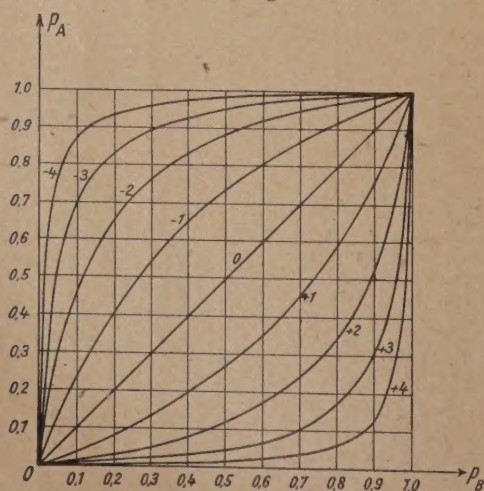


Bild 3. Linien konstanten ξ

bemerkenswerte Nebenergebnis, daß die Linien konstanter Teststärke in einem $p_A - p_B$ Diagramm unabhängig von den Marginalien und von α sind, die lediglich die Beschriftung dieser Linien beeinflussen. Diese Tatsache wurde von Pearson und Merrington a. a. O. bereits auf Grund ihrer numerischen Ergebnisse vermutet. Sie gilt aber, wie wir nun sehen, bei der von ihnen benutzten Betrachtungsweise exakt nur für große Werte der Marginalien, für welche ja die beiden Betrachtungsweisen gegeneinander konvergieren.

§ 4. Der Zusammenhang der beiden Modelle

Es erscheint vom logischen Standpunkte aus als wünschenswert, noch schärfer klarzustellen, was die beiden in § 2 und § 3 dargestellten Modelle gemeinsam haben und worin sie sich unterscheiden. In § 2 wurde angenommen, daß jedes der N -Individuen a priori „weiß“, zu welcher Sorte es gehört. Statt dessen stellten wir uns in § 3 auf den Standpunkt, daß a priori alle Individuen gleichartig sind, und daß die Unterscheidung erst durch die Anwendung der Bearbeitungsverfahren getroffen wird. Dabei ist diese Entscheidung wahrscheinlichkeitstheoretisch aufzufassen: Sie hängt von unkontrollierbaren Unterschieden der Individuen und von statistischen Störungen während der Anwendung der Bearbeitungsverfahren ab. Wollen wir zum besseren Vergleich möglichst analog zu Pearson und Merrington vorgehen, so können wir unser Modell so formulieren, daß jedes Individuum mit den Wahrscheinlichkeiten p_x, p_w, p_y und p_z mit $p_x + p_w + p_y + p_z = 1$ in den dort angegebenen Klassen X, W, Y und Z liegt. Die Wahrscheinlichkeit, die Tafel 2 zu erhalten, ist dann:

$$P(x_1, x_2, w_1, w_2, y_1, y_2, z_1, z_2) = \frac{m!}{x_1! w_1! y_1! z_1!} \cdot \frac{n!}{x_2! w_2! y_2! z_2!} \cdot p_x^{x_1+x_2} p_w^{w_1+w_2} p_y^{y_1+y_2} p_z^{z_1+z_2} \quad (9).$$

Jetzt summieren wir aber nicht bei festen Marginalien X, W, Y und Z der 2×4 -Tafel, sondern bei fester Marginalie r der 2×2 -Tafel; d. h. über alle 8 Variable im Gebiete

$$G = \begin{cases} x_1 + w_1 + y_1 + z_1 = m \\ x_2 + w_2 + y_2 + z_2 = n \\ x_1 + x_2 + w_1 + y_2 = r. \end{cases}$$

Dies kann leichter dadurch geschehen, daß zunächst über das Gebiet

$$G_a = \begin{cases} x_1 + w_1 = a \\ x_2 + y_2 = r - a \\ w_2 + z_2 = n - r + a \\ y_1 + z_1 = m - a \end{cases}$$

und später über alle a summiert wird. Dabei liefert die Summation über G_a die Wahrscheinlichkeit für die Entstehung der Belegung der konzentrierten 2×2 -Tafel. Es ergibt sich in der Tat:

$$\begin{aligned} & \sum_a P(x_i, w_i, y_i, z_i) \\ &= \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} \cdot \sum_{x_1, x_2, w_2, y_1} \binom{a}{x_1} \binom{m-a}{y_1} \binom{r-a}{x_2} \binom{n-r+a}{w_2} \cdot p_x^{x_1+x_2} \cdot p_w^{a-x_1+w_2} \cdot p_y^{y_1-x_2+r-a} \cdot p_z^{m+n-r-w_2-y_1} \\ &= \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} p_x^a p_y^{r-a} p_z^{m+n-r} \cdot \sum_{x_1} \binom{a}{x_1} \left(\frac{p_x}{p_w}\right)^{x_1} \cdot \sum_{w_2} \binom{r-a}{x_2} \left(\frac{p_x}{p_y}\right)^{x_2} \cdot \sum_{w_2} \binom{n-r+a}{w_2} \left(\frac{p_w}{p_z}\right)^{w_2} \cdot \sum_{y_1} \binom{m-a}{y_1} \left(\frac{p_y}{p_z}\right)^{y_1} \\ &= \binom{m}{a} \binom{n}{r-a} \cdot (p_x + p_w)^a \cdot (p_x + p_y)^{r-a} \cdot (p_w + p_z)^{n-r+a} \cdot (p_y + p_z)^{m-a}, \end{aligned}$$

was wegen

$$\begin{aligned} p_x + p_w &= p_A & p_x + p_y &= p_B \\ p_w + p_z &= 1 - p_B & \text{und} & & p_y + p_z &= 1 - p_A \end{aligned}$$

genau mit (4) übereinstimmt, so daß die Fortsetzung der Rechnung wie in § 3 geschieht. Damit ist der Zusammenhang der beiden Modelle geklärt.

§ 5. Numerische Berechnung der Teststärke

Bei geringer Größe der Marginalien m, n und r der 2×2 -Tafel müssen die hypergeometrischen Terme von Formel (8) explizit berechnet werden. Für den Fall $m = n = r = 10$ liefert dies das Bild 4 für P_ξ . Die Wahl der krummen Werte für α ergab sich aus der For-

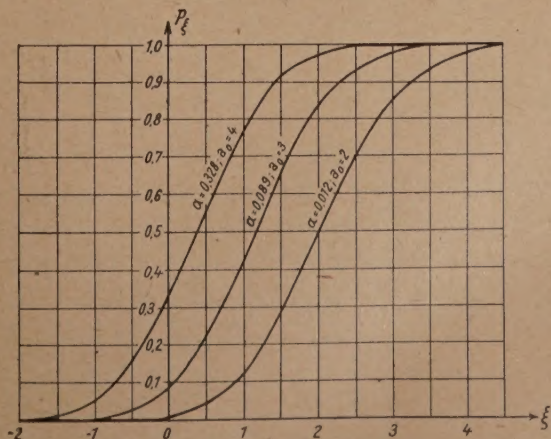


Bild 4. Teststärke bei $m = n = r = 10$

derung der Ganzzahligkeit von a_0 . Aus diesen Kurven kann man noch die entsprechenden Kurven für I_ξ zeichnen, worauf hier verzichtet werde. Die zugehörigen Empfindlichkeitsschranken sind:

$$\begin{aligned}\xi_0 &= 0,77 \text{ für } \alpha = 0,328 \\ \xi_0 &= 2,40 \text{ für } \alpha = 0,089 \\ \xi_0 &= 4,17 \text{ für } \alpha = 0,012.\end{aligned}$$

Bei größeren Werten der Marginalien können wir $\binom{m}{a} \binom{n}{r-a}$ durch die Normalverteilung

$$\binom{m}{a} \binom{n}{r-a} \approx C \cdot e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (a-\bar{a})^2} \dots \dots \dots (10)$$

mit

$$\bar{a} = mp \quad \text{und} \quad \sigma^2 = \frac{mn p(1-p)}{N-1} \quad \text{bei} \quad p = \frac{r}{N} \dots \dots \dots (11)$$

ersetzen. Unter Verzicht auf eine Diskontinuitätskorrektur ist dann approximativ

$$P_\xi(m, n, r, \alpha) \approx \frac{\int_{-\infty}^{a_0} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (a-\bar{a})^2 - a\xi} da}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (a-\bar{a})^2 - a\xi} da} \dots \dots \dots (12),$$

wobei aber ξ absolut nicht zu groß sein darf, damit der Fehler in der Approximation (10) nicht zu sehr betont wird.

Aus (12) erhalten wir nun sofort:

$$P_\xi(m, n, r, \alpha) \approx \frac{\int_{-\infty}^{a_0} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (a-\bar{a} + \sigma^2 \xi)^2} da}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2\sigma^2} \cdot (a-\bar{a} + \sigma^2 \xi)^2} da},$$

und damit schließlich:

$$P_\xi(m, n, r, \alpha) \approx \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cdot \Phi\left(\frac{\bar{a} - a_0 - \sigma^2 \xi}{\sigma \sqrt{2}}\right) \quad \text{mit} \quad \Phi(\gamma) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\gamma e^{-t^2} dt \dots (13).$$

Wir sehen an diesem Ausdruck deutlich das in § 1 erwähnte monotone Verhalten von P^ξ als Funktion von ξ .

Wir können nun auch leicht eine Näherungsformel für die Empfindlichkeitsschranke ξ_0 gewinnen. Wegen $P_{\xi=0} = \alpha$ ergibt sich ja aus (13) in Anbetracht von $a_0 - \bar{a} < 0$ und der Ungeradheit von $\Phi(\gamma)$:

$$1 - \alpha \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{\bar{a} - a_0}{\sigma \sqrt{2}}\right) \approx \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \Phi\left(\frac{a_0 - \bar{a} + \sigma^2 \xi_0}{\sigma \sqrt{2}}\right)$$

und damit

$$\xi_0 \approx \frac{2}{\sigma^2} \cdot (\bar{a} - a_0) \dots \dots \dots (14).$$

Wir sehen wieder, daß bei kleinem α , d. h. kleinem a_0 , der Unempfindlichkeitsbereich anwächst zugunsten der größeren Sicherheit in der Anwendung des Tests.

Um nun die Abhängigkeit der Empfindlichkeitsgrenze ξ_0 von den Marginalien und von α zu finden, benutzen wir die Umkehrfunktion $\gamma = \varphi(\Phi)$ der Funktion $\Phi = \Phi(\gamma)$. Wir haben dann gemäß (13) wegen $P_{\xi=0} = \alpha$:

$$2\alpha \approx 1 - \Phi\left(\frac{\bar{a} - a_0}{\sigma \sqrt{2}}\right),$$

also

$$\bar{a} - a_0 \approx \sigma \sqrt{2} \cdot \varphi(1 - 2\alpha),$$

und damit nach (14):

$$\xi_0 \approx \frac{2\sqrt{2}}{\sigma} \cdot \varphi(1 - 2\alpha) \dots \dots \dots (15).$$

Bei fester Signifikanzschranke α fällt also ξ_0 umgekehrt proportional zur Wurzel aus dem Umfang des Beobachtungsmaterials.

Formel (15) stellt die in § 1 eingeführte Funktion $\varphi(m, n, r; \alpha)$ dar, die sich also in einen nur von den Marginalien und einen nur von α abhängigen Faktor zerlegen läßt. Dabei ist jedoch zu berücksichtigen, daß (15) nur eine Approximationsformel ist, die bei kleinen Marginalien und großem ξ_0 , also kleinem α , stärkere Abweichungen vermuten läßt. Zur Prüfung wurde daher diese Näherung in Bild 5 aufgezeichnet und durch Kreuze die 3 exakten Werte angegeben, die wir für

$$m = n = r = 10$$

gefunden hatten. Wir sehen, daß die Approximation selbst für diese geringe Größe der Marginalien auch für das größte der vorkommenden ξ_0 als durchaus ausreichend zu betrachten ist. Es erscheint daher als entbehrlich, die eingeführte Approximation (10) durch die nächste Näherung zu ersetzen, die dann zu wesentlich umständlicheren Formeln führen würde.

Eingegangen am 31. August 1949.

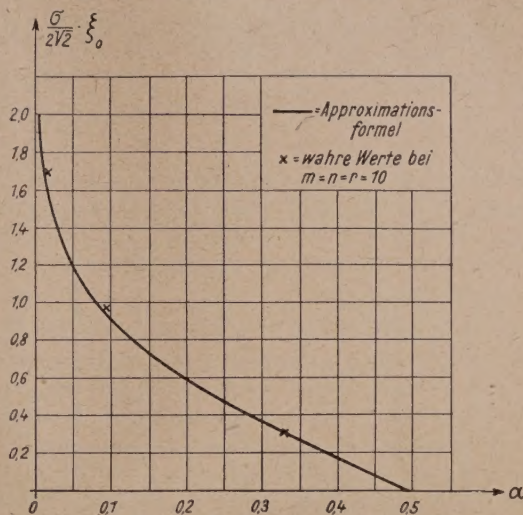


Bild 5. Empfindlichkeitsschranke

Der elastische Halbraum bei einer mechanischen Beeinflussung seiner Oberfläche. (Zweidimensionales Problem)

Von Fritz Sauter in Göttingen

Im Anschluß an die vorhergehende Arbeit wird nach der gleichen Methode die zweidimensionale Wellenausbreitung in einem elastischen Halbraum untersucht, dessen ebene Begrenzungsfläche unter dem Einfluß irgendwelcher (eindimensionaler) Oberflächenbeanspruchung steht. Bei stoßförmiger schneidenartiger Beanspruchung ergibt sich die erwartete und mehrfach beobachtete Stoßwellenausbreitung einschließlich der v. Schmidtschen Kopfswelle.

The topic of a previous publication is continued and, by use of the method then developed, the two-dimensional propagation of waves is investigated in the case that the medium is an elastic semi-infinite body bounded by a plane surface that is under an arbitrary (one-dimensional) strain. If the strain is shock-like and concentrated on a line, the result is the already expected and sometimes observed shock-wave propagation including the v. Schmidt's head-wave.

En appliquant une méthode publiée dans un essai antérieur, la propagation d'ondes à deux dimensions est traitée pour le demi-espace élastique, dont la surface plane est exposée à une sollicitation quelconque (une-dimensionnelle). En sollicitant par chocs et sur une ligne seulement on obtient la propagation l'ondes de choc, déjà prévue et observée plusieurs fois, l'onde de front de v. Schmidt y comprise.

Продолжая предыдущую работу, автор исследует тем-же методом двухразмерное распространение волн в упругом полупространстве, граничная поверхность которого подвергается воздействию каких-нибудь (одномерных) сил. В случае внезапного приложения распределенных вдоль прямой линии сил получается неоднократно наблюдавшееся распространение ударных волн с лобовой волной Шмидт'а.

1. Problemstellung

Den ersten Anstoß zu den anschließenden Untersuchungen gab das folgende schon vielfach diskutierte, bisher aber anscheinend noch nicht in befriedigender Weise gelöste Problem: Trifft eine ebenso stoßartige Kompressionswelle unter einem Neigungswinkel $\alpha < 90^\circ$ auf eine ebene Grenzfläche auf, so bildet sich im allgemeinen eine reflektierte Kompressionswelle unter dem Neigungswinkel α und eine Scherungswelle unter einem kleineren Winkel β aus (vgl. Bild 1a), wobei α und β durch das „Brechungsgesetz“

$$\frac{\sin \alpha}{\sin \beta} = \frac{c_l}{c_t} \dots \dots \dots (1.1)$$

miteinander verknüpft sind. Dabei bedeuten bzw. c_l und c_t die normalen Laufgeschwindigkeiten von Longitudinal-(Kompressions-)Wellen und von Transversal-(Scherungs-)Wellen. Läßt man

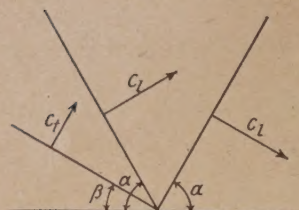


Bild 1a

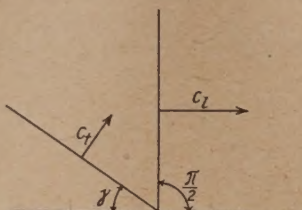


Bild 1b

nun den Winkel α bis 90° anwachsen, so fallen die primäre und die reflektierte Stoßfront der Kompressionswellen zusammen und kompensieren sich, wie die elementare Rechnung zeigt, vollständig, während die Intensität der Schubwelle in der Grenzlage $\beta = \gamma$ mit

$$\sin \gamma = \frac{c_t}{c_l} \dots (1.2)$$

verschwindet. Dennoch sind Stoßwellenkombinationen der in Bild 1b skizzierten Gestalt in großer Zahl beobachtet worden. Es erscheint hierbei zunächst unverständlich, wieso eine einzige schräg zur Grenzfläche liegende Schubwellenfront imstande sein kann, das durch die primäre Stoßwellenfront komprimierte Medium so zu entspannen, daß die Oberfläche spannungsfrei wird.

Um diese Frage näher zu untersuchen und zu klären, soll im folgenden ein Vorgang durchgerechnet werden, der sich mathematisch geschlossen behandeln läßt und bei dem eine solche „Ecke“ von Art des Bild 1b auftritt, nämlich die Wellenausbreitung in einem (nach oben und den Seiten unendlich ausgedehnten) elastischen Halbraum, auf dessen Oberfläche ein Schlag mit einer Schneide geführt wird. Dann breiten sich, wie zahlreiche im Schardinschen Institut gewonnenen Aufnahmen zeigen, im Medium drei verschiedene Arten von Stoßwellenfronten aus (vgl. Bild 2), nämlich erstens eine zylindrische, im Querschnitt halbkreisförmig erscheinende Stoßfront, die mit der Geschwindigkeit c_l für Kompressionswellen läuft, zweitens zwei ebene, von dieser ersten Front unter dem Winkel γ an der Oberfläche nachgeschleppte Schubwellenfronten und schließlich wieder eine zylindrische Stoßfront, die mit der Geschwindigkeit c_t läuft und von den beiden ebenen Wellen tangiert wird. Die beiden ebenen Wellen werden nach O. v. Schmidt als Kopfwellen, nach H. Ott als Flankenwellen bezeichnet. Das Gebiet, in dem

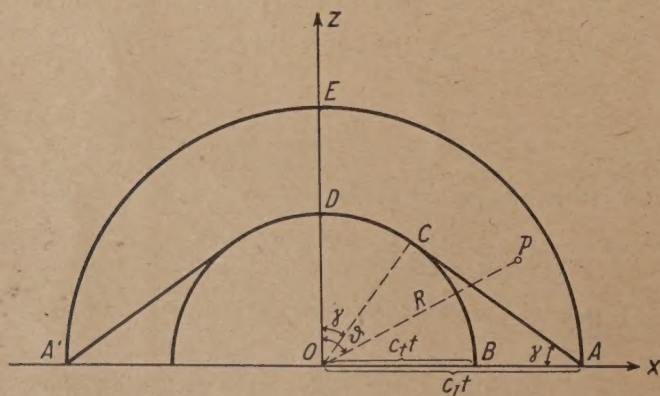


Bild 2

sie zusammen mit der primären Stoßfront an der Oberfläche anstehen, hat den gleichen Charakter wie die Ecke des Bild 1b. Daher muß die Klärung der Verhältnisse im Fall des Bild 2 auch die Beantwortung der obigen Frage betreffend die Ecke bringen.

Nun zeigte es sich aber, daß sich die Durchrechnung der speziellen Verhältnisse des Bild 2 ohne weiteres verallgemeinern läßt, indem man allgemein die Wirkung untersuchen kann, die eine Beanspruchung der Oberfläche eines elastischen Halbraums durch eine

willkürlich vorgebbare Normalspannung $\sigma(x, t)$ und eine Schubspannung $\tau(x, t)$ im Medium hervorruft. Dabei soll die Oberfläche mit der $x-y$ -Ebene zusammenfallen und die z -Richtung in das Medium hineinweisen. Von der y -Koordinate sollen dabei weder die Oberflächenkräfte noch auch die dadurch bedingte Verspannung und Verzerrung des Mediums abhängen.

Beschreibt man die Deformation des Mediums durch den Verschiebungsvektor s mit den Komponenten s_x und s_z , während s_y voraussetzungsgemäß identisch verschwindet, so hat man von den elastischen Grundgleichungen etwa in der Form

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial^2 s_x}{\partial t^2} &= c_l^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) s_x + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right), \\ \frac{\partial^2 s_z}{\partial t^2} &= c_l^2 \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) s_z + (c_l^2 - c_t^2) \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right) \end{aligned} \right\} \dots (1.3)$$

auszugehen. Dabei sind die Laufgeschwindigkeiten c_l und c_t mit den elastischen Konstanten E (Elastizitätsmodul) und μ (Poissonsche Querkontraktionszahl), sowie mit der Massendichte ρ

durch die Beziehungen

$$c_l = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1-\mu}{(1+\mu)(1-2\mu)}}, \quad c_t = \sqrt{\frac{E}{\rho} \frac{1}{2(1+\mu)}} \quad (1.4)$$

verknüpft¹⁾. Die zum Verzerrungszustand s_x, s_z gehörigen Spannungen berechnen sich aus den bekannten Verknüpfungsgleichungen, welche nach Einführung der Geschwindigkeiten c_l und c_t an Stelle der elastischen Konstanten die Form besitzen:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{xx} &= \rho \left\{ c_l^2 \frac{\partial s_x}{\partial x} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial s_z}{\partial z} \right\}, & \sigma_{yy} &= \rho (c_l^2 - 2c_t^2) \left\{ \frac{\partial s_x}{\partial x} + \frac{\partial s_z}{\partial z} \right\}, \\ \sigma_{zz} &= \rho \left\{ c_l^2 \frac{\partial s_z}{\partial z} + (c_l^2 - 2c_t^2) \frac{\partial s_x}{\partial x} \right\}, & \sigma_{xz} &= \rho c_t^2 \left\{ \frac{\partial s_x}{\partial z} + \frac{\partial s_z}{\partial x} \right\} \end{aligned} \right\} \quad (1.5).$$

σ_{xy} und σ_{zy} verschwinden identisch.

Die Aufgabe besteht nun darin, eine Lösung der Gleichungen (1.3) zu finden, für die an der Oberfläche ($z = 0$)

$$\sigma_{zz} = \sigma(x, t), \quad \sigma_{xz} = \tau(x, t) \quad (1.6)$$

wird und bei der sich die Störung von der Oberfläche weg ins Innere des Mediums fortpflanzt.

Die im folgenden wiedergegebene Lösungsmethode schließt sich eng an das Verfahren an, welches vom Verfasser zur Untersuchung der Störung angewandt wurde, die in einem Flüssigkeitshalbraum durch Beanspruchung seiner Oberfläche hervorgerufen wird²⁾. Die folgenden Ausführungen können daher unter Berufung auf I recht kurz gehalten werden. Es sei übrigens hier darauf hingewiesen, daß eine Spezialfrage aus dem hier behandelten allgemeinen Problem, nämlich die Bewegung der Oberfläche eines elastischen Halbraums infolge einer stoßartigen Störung derselben in einem eng begrenzten Bereich längs einer Geraden, bereits von H. Lamb³⁾ untersucht wurde. Sein Ergebnis folgt als Teilresultat aus den folgenden Betrachtungen.

2. Die formale Lösung des Problems

Die allgemeinste, nur von x, z und t abhängige Lösung der Bewegungsgleichungen (1.3) kann man als Überlagerung von ebenen Dehnungs- und Scherungswellen anschreiben, und zwar unter Zusammenfassung der beiden Komponenten des Verschiebungsvektors in der Form

$$\left. \begin{aligned} s_{\{x\}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk \left[\left\{ \frac{k}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}} \right\} f(k, \omega) e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} z - \omega t \right)} \right. \\ &\quad \left. + \left\{ -\frac{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}}{k} \right\} g(k, \omega) e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} z - \omega t \right)} \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.1).$$

Dabei müssen die Vorzeichen der beiden Wurzeln so gewählt werden, daß die Integranden eine in das Medium hineinlaufende bzw. in dieser Richtung exponentiell abklingende Störung darstellen. Die Amplitudenfunktionen f und g bestimmen sich unter Verwendung von (1.5) für $z = 0$ aus der Oberflächenbeanspruchung (1.6) in völliger Analogie zu I als raumzeitliche Doppelintegrale über $\sigma(x, t)$ und $\tau(x, t)$, so daß man die Lösung (2.1) in Form vierfacher Integrale erhält. Man kann sie wie in I unter Verwendung von zwei Einflußfunktionen S_x und S_z anschreiben als (2.2)

$$\left. \begin{aligned} s_{\{x\}} &= \int_{-\infty}^{+\infty} dx' \int_{-\infty}^{+\infty} dt' \left[\sigma(x', t') S_{\{x\}}(x - x', z, t - t', 1, 0) \right. \\ &\quad \left. + \tau(x', t') S_{\{z\}}(x - x', z, t - t', 0, 1) \right] \end{aligned} \right\} \quad (2.2),$$

¹⁾ Alle Bilder sind für den Fall $\mu = 1/4$, d. h. $c_l/c_t = 1/\sin \gamma = \sqrt{3}$, $\gamma = 35^\circ 16'$ gezeichnet.

²⁾ F. Sauter, im folgenden als I zitiert.

³⁾ H. Lamb: Phil. Transact. London A, 203 (1904) S. 1—42. Lamb hat übrigens auch die Oberflächenbewegung im Fall einer punktförmigen Beanspruchung der Oberfläche behandelt, ein Problem, dessen allgemeine Behandlung nach der in I angegebenen Methode einer späteren Mitteilung vorbehalten bleiben soll. Vergl. hierzu auch Petraschen: Doklady Akad. Nauk SSSR, II, 64 (1949) S. 649—652.

wobei die beiden Einflußfunktionen gegeben sind durch die Formeln

$$S_{\{x\}}(x, z, t, \sigma_1, \tau_1) = \frac{1}{4\pi^2 i \varrho} \int_{-\infty}^{+\infty} d\omega \int_{-\infty}^{+\infty} dk \frac{1}{(\omega^2 - 2k^2 c_l^2)^2 + 4k^2 c_l^4 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}} \cdot \left[\left\{ \frac{k}{\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}} \right\} \left((\omega^2 - 2k^2 c_l^2) \sigma_1 + 2k c_l^2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} \tau_1 \right) e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} z - \omega t \right)} + \left\{ \frac{-\sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2}}{k} \right\} \left(2k c_l^2 \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} \sigma_1 - (\omega^2 - 2k^2 c_l^2) \tau_1 \right) e^{i \left(kx + \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} z - \omega t \right)} \right] \quad (2.3).$$

Ersichtlich stellen S_x und S_z die Verschiebungskomponenten dar für den Fall einer zeitlich und räumlich eng begrenzten Oberflächenbeanspruchung, also für

$$\sigma(x, t) = \sigma_1 \delta(x) \delta(t), \quad \tau(x, t) = \tau_1 \delta(x) \delta(t) \quad \dots \dots \dots (2.4).$$

Es gilt nun zu zeigen, daß sich die beiden Integrale in (2.3) trotz ihres komplizierten Baues geschlossen ausführen lassen und dabei zu Lösungen führen, welche sich im Sinn des Stoßwellenbildes des Bild 2 interpretieren lassen.

Zur Durchführung dieser Integrationen ist es zunächst, wie in I, zweckdienlich, statt des ω -Integrals von $-\infty$ bis $+\infty$ den doppelten Realteil des nur von 0 bis $+\infty$ erstreckten ω -Integrals zu nehmen, so daß dann stets $\omega \geq 0$ angenommen werden kann. Ferner ist es, wie in I, angezeigt, die in (2.3) enthaltenen Wurzeln durch die Transformation

$$\left. \begin{aligned} k &= \frac{\omega}{c_l} \sin \alpha, & \sqrt{\frac{\omega^2}{c_l^2} - k^2} &= \frac{\omega}{c_l} \cos \alpha & \text{in den Dehnungswellenanteilen,} \\ k &= \frac{\omega}{c_t} \sin \beta, & \sqrt{\frac{\omega^2}{c_t^2} - k^2} &= \frac{\omega}{c_t} \cos \beta & \text{in den Schubwellenanteilen} \end{aligned} \right\} \dots \dots (2.5)$$

zu beseitigen. Dabei sind die neuen Veränderlichen α und β so gewählt, daß sie, sofern sie reell sind, die Neigungswinkel der einzelnen ebenen Wellen gegen die Oberfläche bedeuten. Sie sind miteinander durch die Beziehung (1.1) verknüpft und können dadurch jeweils aufeinander umgerechnet werden. Setzt man schließlich, wie in I,

$$x = R \sin \vartheta, \quad z = R \cos \vartheta \quad \dots \dots \dots (2.6),$$

wobei man sich aus Symmetriegründen auf den Fall $x \geq 0, \vartheta \geq 0$ beschränken kann⁴⁾, so gehen die Beziehungen (2.3) über in

$$S_{\{x\}} = \frac{1}{2\pi^2 \varrho c_l} \Re \left\{ \frac{1}{i} \int_0^\infty d\omega \left[\int d\alpha \left\{ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right\} \frac{\sin \beta}{c_l N} (\cos 2\beta \sigma_1 + \sin 2\beta \tau_1) e^{i\omega \left(\frac{R}{c_l} \cos(\alpha - \vartheta) - t \right)} + \int d\beta \left\{ \frac{-\cos \beta}{\sin \beta} \right\} \frac{\cos \beta}{c_t N} (\operatorname{tg} \beta \sin 2\beta \sigma_1 - \operatorname{tg} \alpha \cos 2\beta \tau_1) e^{i\omega \left(\frac{R}{c_t} \cos(\beta - \vartheta) - t \right)} \right] \right\} \quad (2.7).$$

Dabei wurde zur Abkürzung

$$N = N(\alpha, \beta) = \operatorname{tg} \alpha \cos^2 2\beta + \operatorname{tg} \beta \sin^2 2\beta \quad \dots \dots \dots (2.8)$$

gesetzt.

In (2.7) sind die Integrationswege entsprechend I in der komplexen α - bzw. β -Ebene aus dem Unendlichen bei $-\pi/2 + i\infty$ kommend im Streifen zwischen $-\pi/2$ und $+\pi/2$ hinunter nach $+\pi/2 - i\infty$ zu führen (vgl. Bild 3), wobei allerdings auf die jetzt vorhandenen singulären Stellen in der α - bzw. β -Ebene zu achten ist.

⁴⁾ Ein Vorzeichenwechsel von x kann in den Exponenten von (2, 3) durch einen Vorzeichenwechsel von k kompensiert werden. Man findet so, in Übereinstimmung mit den entsprechenden physikalischen Überlegungen,

$$S_{\{x\}}(-x, z, t, \sigma_1, \tau_1) = S_{\{x\}}(-x, z, t, \mp \sigma_1, \pm \tau_1) \quad \dots \dots \dots (2.3a),$$

wobei sich die oberen Vorzeichen jeweils auf die x -Komponente, die unteren auf die z -Komponente des Verschiebungsvektors beziehen.

Solche singulären Stellen sind, wie ein Blick auf (2.3) zeigt, die Verzweigungspunkte $k = \pm \omega/c_l$ und $k = \pm \omega/c_t$ in der k -Ebene. Durch die Transformation (2.5) werden die entsprechenden Punkte $\alpha = \pm \pi/2$ in der α -Ebene regulär, während die durch $\beta = \pm \pi/2$ bedingten Punkte mit $\sin \alpha = \pm 1/\sin \gamma$ Verzweigungspunkte bleiben und als solche auf den Ordinaten durch die Punkte $\pm \pi/2$ an den im Bild 3a mit V bezeichneten Stellen liegen. Analog werden in der

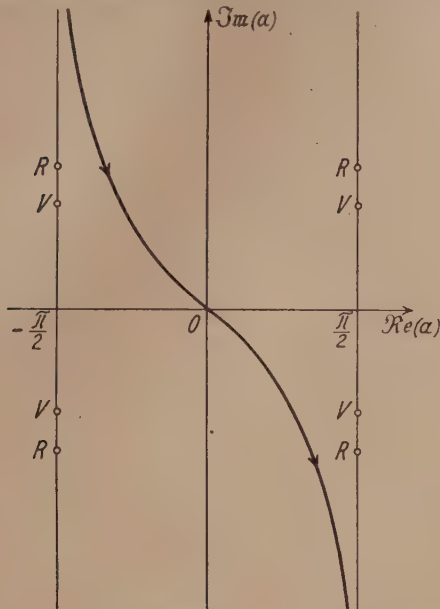


Bild 3a

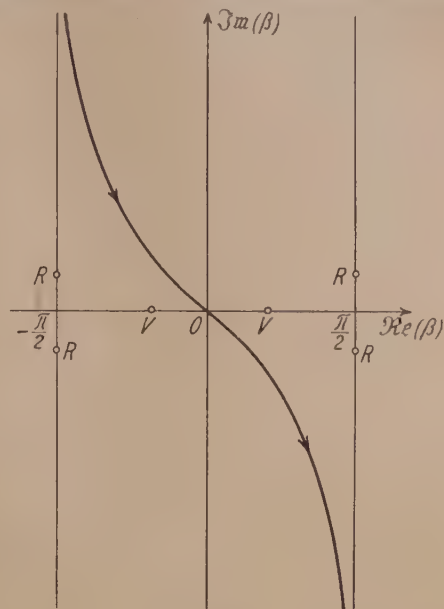


Bild 3b

β -Ebene die Punkte mit $\beta = \pm \pi/2$ regulär und die $\alpha = \pm \pi/2$ entsprechenden Punkte $\beta = \pm \gamma$ bleiben Verzweigungspunkte; sie sind im Bild 3b als V markiert. Ersichtlich können die Verzweigungspunkte in der α -Ebene überhaupt nicht störend wirken, da ja der Integrationsweg ganz im Innern des Streifens $-\pi/2 \leq \Re(\alpha) \leq \pi/2$ verläuft. Im Gegensatz dazu beeinträchtigen die beiden Verzweigungspunkte in der β -Ebene die freie Verschiebbarkeit des Integrationsweges beträchtlich und werden sogar, wie sich zeigen wird, vom mathematischen Standpunkt aus verantwortlich zu machen sein für das Auftreten der v. Schmidtschen Kopfwellen. Hier sei nur noch betont, daß der Integrationsweg in der β -Ebene, wie in Bild 3b gezeigt, ursprünglich zwischen den beiden Verzweigungspunkten durchzuführen ist, wie man etwa durch punktweise Übertragung des Integrationsweges aus der α - in die β -Ebene erkennt.

Neben diesen Verzweigungspunkten treten als weitere singuläre Stellen in den Integranden von (2.7) noch die Nullstellen des Nenners N auf⁵⁾. Es sind dies genau diejenigen Werte von α und β , für die endliche Deformationen des Mediums ohne Beeinflussung seiner Oberfläche ($\sigma = 0, \tau = 0$) möglich sind, und die daher den Rayleighschen Oberflächenwellen entsprechen. Da diese Wellen bekanntlich mit einer Geschwindigkeit $c_R < c_t$ laufen, liegen die zugehörigen Punkte in der k -Ebene auf der reellen Achse außerhalb der beiden Punkte $\pm \omega/c_t$, in der α - und β -Ebene daher auf den Ordinaten durch $\pm \pi/2$. Sie sind in den Bildern 3 mit R bezeichnet. Für die Integranden von (2.7) stellen sie Pole erster Ordnung dar, die sich aber wegen ihrer seitlichen Lage nicht störend auf die im folgendenvorzunehmenden Verschiebungen der Integrationswege auswirken.

Damit sind die Singularitätsverhältnisse in der α - und β -Ebene geklärt, so daß nun an die Ausführung der Integrationen in (2.7) gegangen werden kann.

In den einschlägigen Arbeiten⁶⁾ wird im allgemeinen mit der Integration über die Winkel begonnen, was wegen des komplizierten Baues der Integranden nur für große Entfernungen von der Störstelle ($\omega R \gg c_l, c_t$) möglich ist, und zwar auch dort nur angenähert mit Hilfe der Sattelpunktmethode. Doch verbietet sich dieses Verfahren hier von selbst, da man dann noch über ω von Null an zu integrieren hat.

Man gelangt aber, wie in I, recht schnell und einfach zum Ziel, wenn man erst die ω -Integration und dann diejenige über die Winkel ausführt. Man kommt dabei zu durchwegs konver-

⁵⁾ Der Punkt $\alpha = \beta = 0$, für den N verschwindet, ist auch eine Nullstelle der Zähler in (2, 7), und zwar derart, daß die Integranden an dieser Stelle regulär bleiben.

⁶⁾ Vgl. z. B. H. Ott, Ann. d. Phys. (5) 41 (1942) 443, wo ein weitgehend analoges Problem untersucht wird, nämlich das Verhalten von kugelförmigen Licht- bzw. Schallwellen in Flüssigkeiten an der Grenzfläche zweier verschiedener Medien.

gierenden ω -Integralen, wenn man die Winkelintegration so geführt denkt, daß $\Im m(R \cos(\alpha - \vartheta) - c_l t)$ bzw. $\Im m(R \cos(\beta - \vartheta) - c_l t)$ im ganzen Integrationsbereich positiv ist. Dies ist, wie in 1, dann der Fall, wenn man die Integrationswege aus dem zweiten Quadranten eines durch $\alpha = \vartheta$, bzw. $\beta = \vartheta$ gelegten Koordinatensystems in den vierten führt. Beim α -Integral ist dies ohne weiteres möglich, und man kommt zu dem in Bild 4a eingezeichneten Integrationsweg. Das gleiche gilt auch für das β -Integral, sofern $\vartheta < \gamma$. Andernfalls bleibt der Integrationsweg (in dem hier vorausgesetzten Fall $\vartheta > 0$) an dem rechten Verzweigungspunkt hängen und muß daher in diesem Punkte irgendwie auf dem einen Riemannschen Blatt hineingeführt und auf dem anderen wieder herausgeführt werden. (Für die späteren Betrachtungen kann man den Weg natürlich auch in einer langen Schleife im positiven Sinn um den Verzweigungspunkt herumgezogen denken, wie Bild 4b deutlich zu machen versucht.)

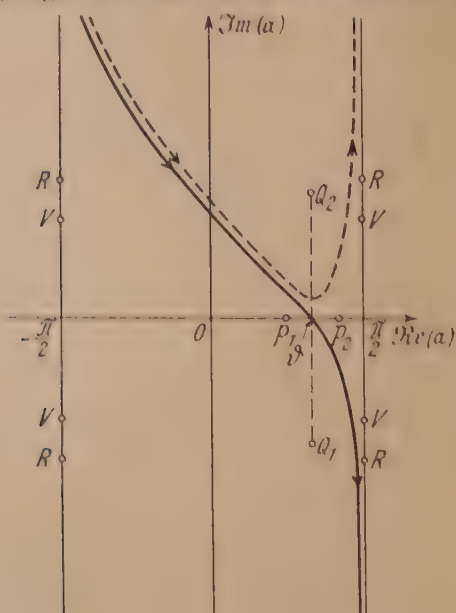


Bild 4a



Bild 4b

Mit der so getroffenen Fortsetzung über die Gestalt der Integrationswege kann man nunmehr die ω -Integration in (2.7) ausführen und erhält

$$S_{\{x\}} = \frac{1}{2\pi^2 c_l} \Re \left\{ \int d\alpha \left\{ \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta \cos 2\beta \sigma_1 + \sin 2\beta \tau_1}{N R \cos(\alpha - \vartheta) - c_l t} \right. \right. \\ \left. \left. + \int d\beta \left\{ \frac{-\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\cos \beta}{N} \frac{\lg \beta \sin 2\beta \sigma_1 - \lg \alpha \cos 2\beta \tau_1}{R \cos(\beta - \vartheta) - c_l t} \right\} \right] \right\} \quad (2.9).$$

Dabei treten nun, wie in 1, neue Singularitäten auf in Form von einfachen Polen an den Nullstellen der Nenner $R \cos(\alpha - \vartheta) - c_l t$ und $R \cos(\beta - \vartheta) - c_l t$. Ist $R > c_l |t|$ bzw. $R > c_l |t|$, so liegen diese Pole auf der reellen Achse (in den Bildern 4 für den Fall $t > 0$ eingetragen und mit P_1 und P_2 bezeichnet; für $t < 0$ liegen sie entsprechend symmetrisch zum Punkt $\vartheta \pm \pi$ und damit sicher außerhalb des hier interessierenden Bereiches zwischen 0 und $\pi/2$). Ist $R < c_l |t|$ bzw. $c_l |t|$, so liegen sie im Fall $t > 0$ auf der Ordinate durch den Punkt $\alpha = \vartheta$ bzw. $\beta = \vartheta$ (in den Bildern 4 mit Q_1 und Q_2 bezeichnet) und im Fall $t < 0$ auf den Ordinaten durch $\vartheta \pm \pi$ und damit außerhalb des interessierenden Streifens. Dabei sind die Integrationswege so zu führen, daß sie P_1 bzw. Q_1 rechts, P_2 bzw. Q_2 links liegen lassen. Im besonderen ist im Fall des Bild 4b die Schleife um den Verzweigungspunkt so eng herumzulegen, daß diese Vorschrift erfüllbar ist.

Nun versagen allerdings die vorstehenden Betrachtungen und Wegvorschriften, sofern die Pole P_1 und P_2 bzw. Q_1 und Q_2 zusammenfallen, also für

$$R = c_l t \quad (2.10a)$$

bzw.

$$R = c_l t \quad (2.10b),$$

oder wenn im Fall $\vartheta > \gamma$ der eine Pol P_1 mit dem Verzweigungspunkt $\beta = \gamma$ zusammenfällt, wenn also

$$R \cos(\gamma - \vartheta) = c_l t \quad \text{bei } \vartheta \geq \gamma \quad (2.10c).$$

Da aber in allen übrigen Fällen die Betrachtungen gültig und anwendbar bleiben, kann man nachträglich die dort gewonnenen Ergebnisse bis an die durch (2.10) gegebenen ausgezeichneten Stellen heran als gültig ansehen.

Diese Stellen sind nun aber auch physikalisch ausgezeichnet. Vergleicht man nämlich die durch (2.10) gegebenen Kurven mit den im Bild 2 gezeichneten Stoßlinien, so stellt man fest, daß sie genau übereinstimmen. Und zwar wird durch (2.10a) die primäre Druckstoßfront, durch (2.10b) die kreisförmige Schubstoßfront und durch (2.10c) die den v. Schmidtschen Kopfwellen entsprechenden Geradenstücke des Bildes 2 wiedergegeben. Diese Identität wird sich im folgenden noch weiter bewähren.

Der nächste Schritt zur Auswertung von (2.9) besteht nun, wie in I, in dem Ersatz der in den Bildern 1 ausgezogen gezeichneten Integrationswege durch die gestrichelt dargestellten Wege, die sich von ersteren nur dadurch unterscheiden, daß die Wegstücke hinter dem ersten Schnittpunkt mit der reellen Achse an dieser gespiegelt werden. Dies ist erlaubt, da erstens von den ganzen Integralen nur die Realteile zu nehmen sind, und da zweitens die Integranden selbst reelle Funktionen ihres Arguments sind. Bemerkte sei hierzu allerdings noch, daß sich im Fall des Bildes 4b der ausgezogene alte und der gestrichelte neue Integrationsweg nur links vom Verzweigungspunkt treffen, da sie rechts davon auf den verschiedenen Blättern der wegen der Verzweigungspunkte zweiblättrigen Riemannschen Ebene liegen.

Schließlich kann man jetzt noch, wie in I, den (gestrichelten) Integrationsweg nach oben ins Unendliche ziehen, wo der Integrand von (2.9) jetzt, im Gegensatz zu I, hinreichend stark verschwindet⁷⁾. Endliche Beiträge in Form von Residuen erhält man nur, wenn einer der Pole oberhalb des gestrichelten Integrationsweges der Bilder 4 liegt. Hierbei ergeben sich folgende Verhältnisse:

Bei den α -Integralen kann ein von Null verschiedener Beitrag nur vom Pol Q_2 herkommen, d. h. also sofern $R < c_1 t$ ist. Als Argument hat man im Residuum $\alpha = \vartheta + i \operatorname{Ar} \cosh(c_1 t/R)$ einzusetzen und findet so als Beitrag dieser Integrale zur Lösung

$$S_{\{x\}}^{(I)} = -\frac{1}{\pi c_1} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \frac{\sin \beta}{N} (\cos 2\beta \sigma_1 + \sin 2\beta \tau_1) \right]_{\alpha = \vartheta + i \operatorname{Ar} \cosh(c_1 t/R)} \quad (I).$$

Analog erhält man bei den β -Integralen im Fall $R < c_1 t$ von dem dann oberhalb des Punktes $\beta = \vartheta$ liegenden Pol Q_2 den Beitrag

$$S_{\{x\}}^{(II)} = -\frac{1}{\pi c_1} \frac{1}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{-\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\cos \beta}{N} (\lg \beta \sin 2\beta \sigma_1 - \lg \alpha \cos 2\beta \tau_1) \right]_{\beta = \vartheta + i \operatorname{Ar} \cosh(c_1 t/R)} \quad (II).$$

Und schließlich geben die β -Integrale noch Beiträge für den Fall $\vartheta > \gamma$, sofern der Pol P_1 des Bildes 4b auf der reellen Achse zwischen dem Verzweigungspunkt bei $\beta = \gamma$ und dem Punkt $\beta = \vartheta$ liegt, d. h. sofern $R > c_1 t > R \cos(\vartheta - \gamma)$ ist. Hier wird analog zu (II)

$$S_{\{x\}}^{(III)} = -\frac{1}{\pi c_1} \frac{1}{\sqrt{R^2 - c_1^2 t^2}} \operatorname{Re} \left[\frac{-\cos \beta}{\sin \beta} \frac{\cos \beta}{N} (\lg \beta \sin 2\beta \sigma_1 - \lg \alpha \cos 2\beta \tau_1) \right]_{\beta = \vartheta - i \operatorname{ar} \cos(c_1 t/R)} \quad (III).$$

Vergleicht man die Abgrenzung der drei Gültigkeitsbereiche mit dem Stoßfrontenbild des Bildes 2, so erkennt man leicht, daß die Lösungen in den verschiedenen, von diesen Stoßfronten begrenzten Bereichen in folgender Weise gegeben sind:

$$\left. \begin{array}{l} \text{Im Bereich AEDCA durch } S^{(I)}, \\ \text{im Bereich BCDÖB durch } S^{(I)} + S^{(II)}, \\ \text{im Bereich ACBA durch } S^{(I)} + S^{(III)} \end{array} \right\} \dots \dots \dots (2.11).$$

Außerhalb der Kreislinie AEA' verschwindet die Lösung streng, und in der linken Hälfte des Bildes, d. h. für $\omega < 0$, gelten die durch (2.3a) bedingten Formeln.

Daß die Ausdrücke (I) bis (III) tatsächlich die Differentialgleichungen (1.3) befriedigen, sofern man s_x und s_z mit S_x und S_z identifiziert, kann man relativ leicht direkt nachrechnen⁸⁾.

⁷⁾ Um dies zu erkennen, muß man in etwas mühsamer Rechnung alle Anteile der Integranden für große Imaginärteile von α und β entwickeln und auf Grund von (1.1) die beiden Integrale zusammenziehen.

⁸⁾ Es genügt beispielsweise im Fall der Funktionen (I) zu zeigen, daß Ausdrücke der Form

$$S_x = \frac{A(\alpha) \sin \alpha}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}, \quad S_z = \frac{A(\alpha) \cos \alpha}{\sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}}$$

die Gl. (1.3) befriedigen, sofern α mit x , z und t durch

$$R \cos(\alpha - \beta) = x \sin \alpha + z \cos \alpha - c_1 t, \quad R \sin(\alpha - \beta) = x \cos \alpha + z \sin \alpha + t \sqrt{c_1^2 t^2 - R^2}$$

verknüpft ist; dabei muß β auf Grund von (1.1) durch α ausgedrückt werden.

Daß die Kombination (2.11) die Abstrahlbedingung befriedigt, ist unmittelbar evident. Daß sie schließlich den Randbedingungen an der Grenzfläche genügt und somit tatsächlich die Lösung des Problems darstellt, wird im nächsten Abschnitt gezeigt.

3. Die Bewegung der Oberfläche

In diesem und den folgenden Abschnitten sollen die Formeln (2.11) mit (I) bis (III) eingehender diskutiert und in ihrer Struktur genauer untersucht werden. Die erste hierbei zu behandelnde Spezialfrage soll die nach der Bewegung der Oberfläche und der in ihr vorhandenen Verspannung sein. Denn erstens ist hier noch der Nachweis zu erbringen, daß bei den Lösungen (I) bis (III) die Oberflächenbeanspruchung außer für $x = 0$ und $t = 0$ verschwindet. Und zweitens ist dieser Fall vor allem für die Anwendungen wichtig. Im übrigen wurde er bereits von Lamb (l. c.) untersucht, ohne daß allerdings dort die Wellenausbreitung in den Raum hinein untersucht wurde.

Für die Berechnung der Oberflächenbewegung hat man in den Formeln (I) bis (III) nur $z = 0$, d. h. also $\vartheta = \pi/2$ (für $x > 0$) zu setzen; doch muß man die beiden Bereiche $c_t t < x < c_l t$ und $0 < x < c_t t$ gesondert untersuchen. Im erstgenannten Bereich ist die Summe $S(I) + S(III)$, im letzteren die Summe $S(I) + S(II)$ zu bilden. Da sich die dabei auftretenden Formeln dann einfacher schreiben, sei als neue Koordinate statt x die Größe ξ eingeführt, welche durch

$$x = c_t t \sin \xi \quad \dots \dots \dots (3.1)$$

definiert ist und im ersten Bereich zwischen γ und $\pi/2$, im zweiten zwischen 0 und γ liegt.

Wertet man die obigen Formeln unter Berücksichtigung der verschiedenen Realitätsverhältnisse in den beiden Bereichen aus, so kommt man nach einiger Rechnung in Übereinstimmung mit den Lambschen Ergebnissen zu folgenden Resultaten:

Für $c_t t < x < c_l t$, d. h. für $\gamma < \xi < \pi/2$ gilt

$$S_{\xi} = \frac{\sin \gamma \sin^2 \xi \cos \xi \left\{ -2 \sin \gamma \sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 \gamma} \right\}}{\pi \rho c_l c_t} \frac{(\sin^2 \xi - 2 \sin^2 \gamma) \sigma_1 + 2 \sin \gamma \sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 \gamma} \tau_1}{(\sin^2 \xi - 2 \sin^2 \gamma)^4 + 16 \sin^6 \gamma \cos^2 \xi (\sin^2 \xi - \sin^2 \gamma)} \quad (3.2),$$

für $0 < x < c_t t$, d. h. für $0 < \xi < \gamma$, gilt

$$S_{\xi} = \frac{\sin^2 \xi}{\pi \rho c_l c_t} \frac{\left\{ \sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \xi} \tau_1 \right\}}{\sin \gamma \cos \xi \sigma_1} \frac{1}{(\sin^2 \xi - 2 \sin^2 \gamma)^2 - 4 \sin^3 \gamma \cos \xi \sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \xi}} \quad (3.3).$$

Im einzelnen ist hierzu folgendes zu sagen (vgl. auch hierzu die Diskussion bei Lamb):

Im Bereich $c_t t < x < c_l t$ gilt offenbar

$$\frac{S_x}{S_z} = - \frac{2 \sin \gamma \sqrt{\sin^2 \xi - \sin^2 \gamma}}{\sin^2 \xi - 2 \sin^2 \gamma} = - \frac{2 c_t t \sqrt{x^2 - c_t^2 t^2}}{x^2 - 2 c_t^2 t^2} \quad \dots \dots \dots (3.4).$$

Der Verschiebungsvektor hat in diesem Bereich eine von der Art der Stoßanregung (σ_1 , bzw. τ_1) unabhängige Richtung, die allein von der Lage x des betrachteten Punktes relativ zur Stoßwellenfront der Schubwelle $c_t t$ abhängt. Und zwar dreht er sich beim Darüberstreichen der Störungsbewegung des Mediums über einen festen Punkt aus einer Anfangsrichtung für $x = c_t t$, gegeben durch $S_x/S_z = -\lg 2 \gamma = -\sqrt{1 - \mu/\mu_s}$,⁹⁾ letzteres nach (1.2) und (1.4), mit fortschreitendem t , also abnehmenden ξ im positiven Sinn durch die Horizontale, die im Punkt mit $\sin \xi = \sin \gamma \sqrt{2}$ erreicht wird, weiter bis zur Vertikalen im Punkt $\xi = \gamma$, d. h. für $x = c_l t$. Der Betrag des Verschiebungsvektors ist im Moment des Durchganges der Kompressionsfront ($x = c_l t$) wegen des Faktors $\cos \xi$ gleich Null, wächst dann erst an, fällt nach Erreichen eines breiten Maximums wieder ab und verschwindet bei rein schubförmiger Anregung ($\sigma_1 = 0$) bei $\xi = \gamma$, also an der Stoßfront der Schubwelle, während er bei reiner Normalbeanspruchung der Oberfläche bereits im erwähnten Punkt mit $\sin \xi = \sin \gamma \sqrt{2}$ verschwindet und dann wieder gegen die Stoßfront der Schubwelle hin ansteigt.

Im Bereich $0 < x < c_t t$ werden die Verhältnisse noch einfacher. Hier ruft nach (3.3) eine reine Normalbeanspruchung ($\tau_1 = 0$) eine Verschiebung der Materie senkrecht zur Oberfläche und eine reine Schubbeanspruchung ($\sigma_1 = 0$) eine Verschiebung parallel zu ihr hervor.

⁹⁾ Die gleiche Richtung der Oberflächenbewegung (bei allerdings im Limes ebenso verschwindenden Betrag wie hier) erhält man bei der Reflexion einer ebenen Stoßwelle an der Oberfläche im Grenzfall streifender Inzidenz, also senkrecht auf der Oberfläche aufstehender Stoßfront.

Und zwar wird im Angriffspunkt dieser Stoßkräfte, also für $x = 0$, $\xi = 0$ die Verschiebung gegeben durch

$$S_{\xi} = - \frac{1}{2\pi\varrho c_l^2 \left(1 - \frac{c_l^2}{c_t^2}\right) t} \left\{ \begin{matrix} \tau_1 \\ \sigma_1 \end{matrix} \right\} \dots \dots \dots (3.5),$$

hat also die Richtung der erregenden Kraft (σ_1 wirkt ja bei der hier getroffenen Koordinatenwahl in der negativen z -Richtung!) und klingt mit zunehmender Zeit wie $1/t$ ab. Geht man vom Angriffspunkt der Kraft zu größeren x -Werten, so wächst die Verschiebung monoton an und wird bei dem Wert ξ_R , welcher dem Wellenkopf der Rayleighschen Oberflächenwelle entspricht und durch die Nullstelle des Nenners in (3.3) gegeben ist, unendlich groß¹⁰⁾. Beim Durchschreiten des Punktes ξ_R ändert der Verschiebungsvektor sein Vorzeichen und fällt dann monoton ab bis zum Punkt $\xi = \gamma$, wo sich die Funktionswerte von S_x und S_z stetig an die im Bereich $\xi > \gamma$ gültigen Werte anschließen, allerdings mit unstetiger Ableitung.

Soviel über die Deformation der Oberfläche! Um auch die Verspannungsverhältnisse zu untersuchen, kann man sich aus den Deformationen (I) bis (III) nach (1.5) die Komponenten des Verspannungstensors ausrechnen. Man findet dann für $x \neq 0$, $t \neq 0$ nach längerer Rechnung tatsächlich $\sigma_{zz} = 0$, $\sigma_{xz} = 0$, so daß man σ_{xx} wegen (1.5) nach der Formel

$$\sigma_{xx} = 4\varrho(c_l^2 - c_t^2) \frac{c_l^2}{c_t^2} \frac{\partial s_x}{\partial x} = \varrho c_l^2 \sin^2 2\gamma \frac{\partial s_x}{\partial x} \dots \dots \dots (3.6)$$

ermitteln kann.

Schneller erkennt man das Verschwinden von σ_{zz} und σ_{xz} an der Oberfläche, wenn man auf die Lösungen in der Form (2.9) zurückgreift. Hier wird, sofern man das später von selbst wegfallende Glied mit τ_1 sogleich wegläßt, für beliebiges z nach (1.5)

$$\sigma_{zz} = - \frac{c_l^2}{2\pi^2 c_t} \operatorname{Re} \left[\int \frac{d\alpha}{N} \frac{\sin \beta \cos^2 2\beta \sigma_1}{(x \sin \alpha + z \cos \alpha - c_l t)^2} + \int \frac{d\beta}{N} \frac{\sin \beta \sin^2 2\beta \sin^2 \gamma \sigma_1}{(x \sin \beta + z \cos \beta - c_l t)^2} \right] \quad (3.7).$$

Läßt man hier z gegen Null gehen, so werden die Nenner bis auf einen Faktor $\sin^2 \gamma$ gleich, so daß man die Integrale unter Berücksichtigung von (1.2) und (2.8) zusammenziehen und vereinfachen kann in der Form

$$\sigma_{zz} = - \frac{c_l}{2\pi^2} \operatorname{Re} \left[\int \frac{d\alpha \cos \alpha \sigma_1}{(x \sin \alpha - c_l t)^2} \right] = \frac{c_l}{2\pi^2 x} \operatorname{Re} \left[\int d \left(\frac{\sigma_1}{x \sin \alpha - c_l t} \right) \right] \dots \dots \dots (3.8).$$

Und dieser Ausdruck verschwindet für alle $x \neq 0$, da $x \sin \alpha - c_l t$ an den Enden des Integrationsweges im imaginär-Unendlichen außer für $x = 0$ über alle Grenzen wächst. Ähnlich läßt sich auch das Verschwinden von σ_{xz} außerhalb $x = 0$ zeigen.

4. Die Deformation in der Umgebung der „Ecke“

Den Anlaß zu der vorliegenden Untersuchung gab die Frage, wie es möglich ist, daß die Verspannung, welche durch eine senkrecht auf einer Grenzfläche aufstehenden Kompressionswelle in einem Medium hervorgerufen wird, und von der man zunächst annehmen möchte, daß sie durch ein mit seinen Achsen parallel und senkrecht zu dieser Welle stehendes Spannungselipsoid beschrieben werden kann, erfahrungsgemäß durch eine einzige, unter dem richtigen Machschen Winkel γ nachgeschleppte Schubwelle (v. Schmidtsche Kopfwelle) so entlastet werden kann, daß an der Oberfläche sowohl σ_{zz} als auch σ_{xz} verschwinden. Diese Frage läßt sich nun an Hand der Lösungen (I) und (III) durch Auswertung in der Nähe des Eckpunktes A des Bild 2 beantworten, wie sogleich gezeigt werden soll. Doch möge das Ergebnis dieser Betrachtungen hier vorweggenommen werden:

Die Lösung des scheinbaren Paradoxons liegt darin, daß sich die in Bild 2 und damit auch die in Bild 1b auftretende Kompressionsfront in der Nähe der Oberfläche dadurch wesentlich anders verhält als eine gewöhnliche ebene stoßartige Kompressionswelle, daß ihre Stärke mit Annäherung an die Oberfläche abfällt und an der Oberfläche selbst bei verschwindender Stärke sich wesentlich singular verhält. Dadurch wird der von ihr im Medium hervorgerufene Spannungszustand inhomogen, so daß das Spannungselipsoid in kleinem Abstand von der Front nicht mehr parallel und senkrecht zu ihr orientiert ist. Und zwar dreht es sich gegen die

¹⁰⁾ Daß am Wellenkopf der Rayleighwelle ebenso wie an den später zu betrachtenden Stoßwellenfronten die Verschiebung unendlich groß wird, liegt an der speziellen singulären Anregung. Bei endlichem $\sigma(x, t)$ und $\tau(x, t)$ im Sinne von (2, 2) verschwinden diese Singularitäten infolge der noch auszuführenden zwei Integrationen. Übrigens sei bemerkt, daß die Rayleighwelle auch im singulären Fall nur unmittelbar an der Oberfläche zu unendlich großen S -Werten führt, während bei den übrigen Stoßfronten S_x und S_z gerade an der Oberfläche endliche Werte besitzen, bzw. überhaupt verschwinden, im Innern aber unendlich groß werden.

Oberfläche hin gerade in der Weise, daß es durch das Spannungsellipsoid von der sich normal verhaltenden Entlastungsschubwelle in der durch die Oberflächenbedingungen geforderten Weise kompensiert werden kann.

Man kann sich diese Verhältnisse dadurch anschaulich klar zu machen versuchen, daß man die von der Oberfläche ausgehenden, durch das Darüberstreichen der primären Kompressionswelle erregten Elementarwellen im Sinne von Huygens konstruiert. Dies ist in Bild 5 geschehen, wobei solche in äquidistanten Zeitabständen von der Oberfläche ausgehenden Wellen angedeutet sind. Man erkennt, daß die v. Schmidtsche Kopfwellen eine normale Einhüllende von solchen schubwellenartigen Elementarwellen darstellt, während die kompressionsartigen Elementarwellen die primäre Stoßfront nur in unmittelbarer Umgebung des Eckpunktes A einholen und schwächen werden, jedoch den von dieser Stoßfront hinter ihr hervorgerufenen Verspannungszustand in durchaus inhomogener Weise partiell entlasten können.

Man kann sich die Verhältnisse übrigens auch im Sinn des Ansatzes (2.1) als Folge der Überlagerung gewöhnlicher ebener Wellen klarzumachen versuchen. Bild 6 zeigt einige dieser ebenen Wellen mit den zu ihnen gehörigen reflektierten Wellen, und zwar insbesondere solche

Wellenfronten, welche im Ansatz (2.1) gerade die gleiche Phase 0 besitzen. Man erkennt, daß sich bei solchen Wellenkombinationen die v. Schmidtsche Kopfwellen als die Grenzlage der ebenen Schubwellen für den Grenzfall $\alpha = \pi/2$ ergibt und damit letzten Endes eine normale Schubwelle darstellt, während die beiden kreisförmigen Stoßwellen als Einhüllende der ebenen Wellenflächen erscheinen, welche übrigens die Besonderheit besitzen, in der Grenzlage $\alpha = \pi/2$ bzw. $\beta = \pi/2$ durch die zugehörige reflektierte Welle gerade kompensiert zu werden.

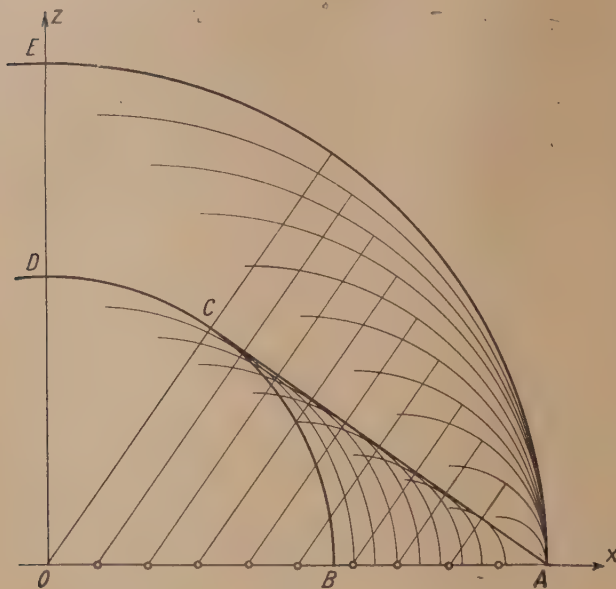


Bild 5

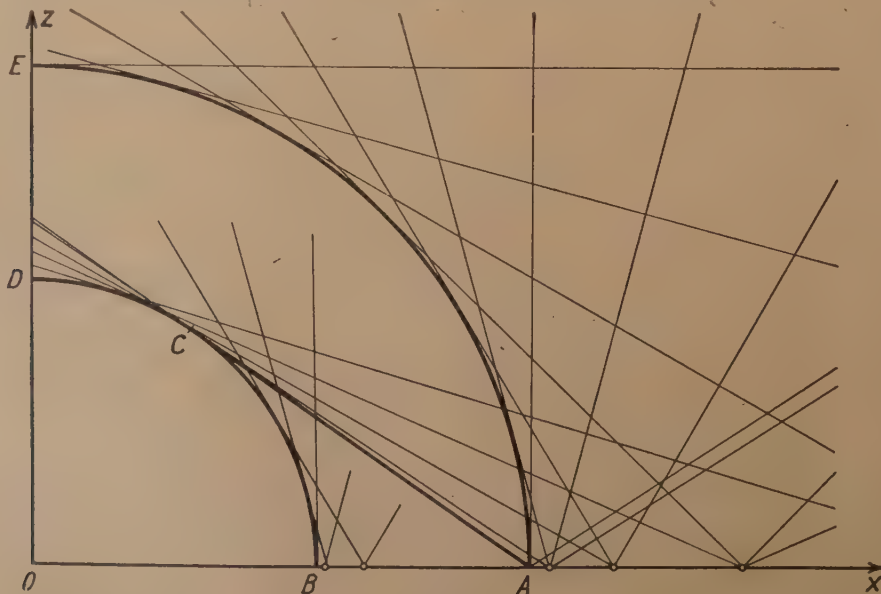


Bild 6

Zur Durchrechnung dieser Verhältnisse ist es angezeigt, vermittels

$$x = c_1 t (1 - \varepsilon \cos \eta), \quad z = c_1 t \varepsilon \sin \eta \quad \dots \quad (4.1)$$

zu Polarkoordinaten mit dem Ursprung im Eckpunkt überzugehen und dabei den relativen Abstand ε als klein gegen 1 anzunehmen. Man erhält dann in erster Näherung aus (I), anwendbar

auf den ganzen Winkelbereich $0 < \eta < \pi/2$ die Formel

$$S_{\{x\}}^{(I)} = \frac{\sqrt{2\varepsilon \cos \eta}}{\pi \varrho c_l^2 t \cos^2 2\gamma} \left\{ -\frac{1}{2} \operatorname{tg} \eta - \operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg}^2 2\gamma \right\} (\cos 2\gamma \sigma_1 + \sin 2\gamma \tau_1) \quad (4.2),$$

während sich aus (III) in gleicher Näherung für den Winkelbereich $0 < \eta < \gamma$ die Beziehung

$$S_{\{x\}}^{(III)} = \frac{2\sqrt{2\varepsilon \sin(\gamma - \eta) \sin \gamma}}{\pi \varrho c_l^2 t \cos^3 2\gamma} \left\{ \frac{-\cos \gamma}{\sin \gamma} \right\} (\cos 2\gamma \sigma_1 + \sin 2\gamma \tau_1) \quad (4.3)$$

ergibt.

Aus diesen beiden Formeln folgt zunächst, da sie in gleicher Weise von der Kombination $\cos 2\gamma \sigma_1 + \sin 2\gamma \tau_1$ abhängen, daß der Deformationszustand in der Nähe der Ecke A nicht von der speziellen Art des Materials abhängt, sondern, analog wie bei anderen Ausbreitungsvorgängen in der Wellenzone, unabhängig von der Art der Anregung ist. Damit gewinnen die Betrachtungen dieses Abschnittes über die Verhältnisse in der Nähe von Ecken nach Art des Bildes 1b Allgemeingültigkeit.

Im einzelnen betrachtet zeigt Formel (4,2), daß man unmittelbar an der primären Stoßfront ($\eta = \pi/2$) für $\varepsilon \neq 0$ mit einem (in allerdings integrierbarer Weise) unendlich großen S_x bei verschwindendem S_z zu rechnen hat. Für kleiner werdendes η dreht sich der Verschiebungsvektor aus der horizontalen Lage stetig im Sinn des Uhrzeigers bis zur Neigung

$$(S_x/S_z)^{(I)} = -\operatorname{tg} \gamma \operatorname{tg}^2 2\gamma \quad \text{für} \quad \eta = 0.$$

Im Gegensatz dazu besitzt nach Formel (4,3) der dadurch gegebene Anteil des Verschiebungsvektors eine feste Richtung, gegeben durch $(S_x/S_z)^{(III)} = -\operatorname{ctg} \gamma$ für alle η -Werte zwischen 0 und γ . Dieser Anteil liegt somit stets parallel zur Schubwellenfront und hängt, wie (4,3) zeigt, nur vom Abstand des Bezugspunktes von dieser Front ab und verschwindet an der Front selbst.

An der Oberfläche selbst, d. h. für $\eta = 0$, ist die gesamte Verschiebung als Summe aus den beiden Anteilen (4,2) und (4,3) gegeben durch

$$S_{\{x\}} = \frac{\sqrt{2\varepsilon}}{\pi \varrho c_l^2 t \cos^4 2\gamma} \left\{ \frac{-\sin 2\gamma}{\cos 2\gamma} \right\} (\cos 2\gamma \sigma_1 + \sin 2\gamma \tau_1) \quad (4.4),$$

und diese Formel stimmt genau mit der Formel (3,2) überein, wenn man dort im Sinne des hier betrachteten Grenzfalles und wegen (3,1) bzw. (4,1) angenähert $\xi = \pi/2 - \sqrt{2\varepsilon}$ setzt.

Rechnet man sich nun noch aus (4,2) und (4,3) mit Hilfe von (1,5) die Spannungskomponenten aus, so findet man als Beitrag des Anteils (I) ein Spannungsellipsoid, welches sich mit abnehmenden η im positiven Sinn dreht, während das des Anteils (II) mit seinen Hauptspannungsrichtungen festliegt und nur hinsichtlich seines Betrages vom Abstand von der Kopfwellenfront abhängt. Auf diese Weise ist tatsächlich eine partielle Kompensation der Spannungskomponenten an der Oberfläche in der von den Randbedingungen geforderten Weise möglich.

5. Die Deformation in der Nähe der Stoßwellenfronten

Die durch die Bilder 5 und 6 charakterisierten elementaren Betrachtungen über das Zustandekommen der verschiedenen Stoßwellenfronten, wie auch die analytischen Betrachtungen des letzten Abschnittes lassen vermuten, daß die verschiedenen Stoßfronten des Bildes 2 die Materie in ganz verschiedener Weise beeinflussen. Daß dies tatsächlich der Fall ist, zeigen die folgenden Ausführungen.

Relativ einfach liegen die Verhältnisse beim primären Kompressionsstoß. Entwickelt man hier die Formeln (I) in der unmittelbaren Umgebung der Stoßfront, indem man $0 < c_l t - R \ll R$ annimmt, so findet man in erster Näherung

$$S_{\{x\}}^{(I)} = -\frac{\cos \vartheta}{\pi \varrho c_l \sqrt{c_l^2 t^2 - R^2}} \left\{ \frac{\sin \vartheta}{\cos \vartheta} \right\} \frac{(1 - 2 \sin^2 \gamma \sin^2 \vartheta) \sigma_1 + 2 \sin \vartheta \sin \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \vartheta} \tau_1}{(1 - 2 \sin^2 \gamma \sin^2 \vartheta)^2 + 4 \sin^2 \vartheta \cos \vartheta \sin^2 \gamma \sqrt{1 - \sin^2 \gamma \sin^2 \vartheta}} \quad (5.1).$$

Die Verschiebung ist somit in dieser Näherung radial gerichtet und nimmt in ihrem Betrag bei Annäherung an die Stoßfront verkehrt proportional der Wurzel aus dem Abstand zu. Bei festgehaltenem R nimmt $S^{(I)}$ mit zunehmendem ϑ schließlich in der Nähe von $\vartheta = \pi/2$ wie $\cos \vartheta$ gegen Null ab, und man überzeugt sich leicht, daß in diesem Grenzgebiet die Formeln (5,1) und (4,2) bis auf die Bezeichnungen übereinstimmen.

In der Nähe der beiden Schubwellenfronten verhält sich der durch (I) gegebene Anteil regulär. Es genügt daher zum Studieren der hier interessierenden Verhältnisse die Betrachtung der Anteile (II) und (III) allein. Innerhalb der kreisförmigen Schubstoßfront hat man die

Formeln (II) für den Fall $0 < c_t t - R \gg R$ zu entwickeln, muß aber dabei die beiden Fälle $0 < \vartheta < \gamma$ und $\gamma < \vartheta < \pi/2$ unterscheiden, da α im ersteren Fall für $c_t t = R$ rein reell, im letzteren Fall so komplex wird, daß $\cos \alpha$ negativ imaginär und zwar gleich $-i\sqrt{\sin^2 \vartheta / \sin^2 \gamma - 1}$ ist¹¹⁾. Man findet so für $c_t t - R \ll R$, $0 < \vartheta < \gamma$

$$S_{\{x\}}^{(II)} = \frac{\cos \vartheta}{\pi \rho c_t \sqrt{c_t^2 t^2 - R^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{array} \right\} \frac{\sin 2 \vartheta \sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \vartheta} \sigma_1 - \cos \vartheta \cos 2 \vartheta \tau_1}{\cos \vartheta \cos^2 2 \vartheta + \sin^2 2 \vartheta \sqrt{\sin^2 \gamma - \sin^2 \vartheta}} \quad (5.2),$$

für $c_t t - R \ll R$, $\gamma < \vartheta < \pi/2$

$$S_{\{x\}}^{(II)} = \frac{\cos \vartheta}{\pi \rho c_t \sqrt{c_t^2 t^2 - R^2}} \left\{ \begin{array}{l} \cos \vartheta \\ -\sin \vartheta \end{array} \right\} \frac{\sin^3 2 \vartheta (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \gamma) \sigma_1 - \cos^2 \vartheta \cos^3 2 \vartheta \tau_1}{\cos^2 \vartheta \cos^4 2 \vartheta + \sin^4 2 \vartheta (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \gamma)} \quad (5.3).$$

Die beiden Formeln, die für $\vartheta = \gamma$ stetig aneinander anschließen, stellen eine Deformation der Materie dar, bei der der Verschiebungsvektor in der hier betrachteten Näherung parallel zur Schubwellenfront liegt und seinem Betrag nach bei der Annäherung an die Front ebenfalls verkehrt proportional zur Wurzel aus dem Abstand von ihr anwächst. An der Oberfläche ($\vartheta = \pi/2$) verschwindet ersichtlich dieser Anteil der Gesamtverschiebung.

Vor der kreisförmigen Stoßfront des Schubwellenanteils kommt im Bereich ACBA des Bildes 2, also für $\vartheta > \gamma$, noch ein Beitrag zum Verschiebungsvektor vom Lösungsanteil (III) her. In unmittelbarer Nähe des Frontstückes BC, also für $0 < R - c_t t \ll R$, $\vartheta > \gamma$ erhält man durch analoge Entwicklung

$$S_{\{x\}}^{(III)} = \frac{\cos^2 \vartheta \sin 2 \vartheta \cos 2 \vartheta \sqrt{\sin^2 \vartheta - \sin^2 \gamma}}{\pi \rho c_t \sqrt{R^2 - c_t^2 t^2}} \left\{ \begin{array}{l} -\cos \vartheta \\ \sin \vartheta \end{array} \right\} \frac{\cos 2 \vartheta \sigma_1 + \sin 2 \vartheta \tau_1}{\cos^2 \vartheta \cos^4 2 \vartheta + (\sin^2 \vartheta - \sin^2 \gamma) \sin^4 2 \vartheta} \quad (5.4).$$

Diese Formel läßt erkennen, daß das Frontstück BC nicht als Stoßwellenkopf im üblichen Sinn wie etwa die Bögen AE und CD zu bezeichnen ist, da bei ihm die Verschiebung nicht plötzlich auf einen großen Wert ansteigt. Vielmehr wächst hier der wiederum zur Front tangential liegende Verzerrungsvektor bei der Annäherung von vorn an das Bogenstück BC ebenfalls verkehrt proportional der Wurzel aus dem Abstand an, so daß man hier eine von vorne und hinten in ähnlicher Weise, wenn auch zum Teil mit verschiedenen Vorzeichen anwachsende Deformation an der „Stoßfront“ vorfindet. Es sei hier übrigens noch darauf hingewiesen, daß der durch (5.4) gegebene Beitrag ebenfalls an der Oberfläche verschwindet.

Um nun auch den Verlauf des Verschiebungsvektors in der Nähe der Kopfwelle zu untersuchen, ist es zweckmäßig, alle die Punkte zusammenfassend zu behandeln, die auf einer zu ihr parallelen Geraden im Abstand $\xi c_t t$ von der Kopfwelle gegen die Seite der Oberfläche hin liegen, also die Punkte mit

$$x = c_t t (1 - \xi) \frac{\sin \vartheta}{\cos(\vartheta - \gamma)}, \quad z = c_t t (1 - \xi) \frac{\cos \vartheta}{\cos(\vartheta - \gamma)}, \quad R = c_t t (1 - \xi) \frac{1}{\cos(\vartheta - \gamma)} \quad (5.5).$$

Setzt man diese Ausdrücke in die Formel (III) ein und betrachtet ξ als klein gegen 1, so erhält man in ähnlicher Weise wie bisher

$$S_{\{x\}}^{(III)} = \frac{1}{\pi \rho c_t^2 t \cos^3 2 \gamma} \sqrt{\xi \left(\frac{\sin 2 \gamma}{\tan(\vartheta - \gamma)} \right)^3} \left\{ \begin{array}{l} -\cos \gamma \\ \sin \gamma \end{array} \right\} (\cos 2 \gamma \sigma_1 + \sin 2 \gamma \tau_1) \quad (5.6).$$

Im Gegensatz zu den übrigen Stoßwellenfronten fällt somit die von (III) herrührende Deformation bei der Annäherung an die Kopfwelle ab und verschwindet in derselben. Es liegen hier somit die gleichen Verhältnisse vor, wie sie bereits bei der Diskussion der Verhältnisse in der Nähe der Ecke A gefunden wurden. In der Tat gehen ja die Formeln (5.6), wenn man in ihnen $\vartheta = \pi/2$ und $c_t t \xi = c_t t \sin(\gamma - \eta)$ setzt, in die entsprechenden Formeln (4.3) über.

Die Entwicklungen (5.6) werden ungültig, wenn man in die Nähe des Punktes C des Bildes 2 kommt, wenn man bei endlichem ξ also $\vartheta \rightarrow \gamma$ werden läßt. Denn naturgemäß darf bei einem solchen Grenzübergang die Kontur $R = c_t t$, d. h. $\xi = 1 - \cos(\vartheta - \gamma) \approx (\vartheta - \gamma)^2/2$ nicht überschritten werden. Um auch eine im Zipfel beim Punkt C gültige Entwicklung zu erhalten, ist es angezeigt, nunmehr im Gegensatz zu (5.5)

$$x = c_t t \left\{ \left(1 - \frac{\lambda \xi^2}{2} \right) \sin \gamma + \xi \cos \gamma \right\}, \quad z = c_t t \left\{ \left(1 - \frac{\lambda \xi^2}{2} \right) \cos \gamma - \xi \sin \gamma \right\} \text{ mit } 0 \leq \lambda < 1 \quad (5.7)$$

¹¹⁾ Das Vorzeichen der Wurzel erschließt man hier und in ähnlichen Fällen aus Stetigkeitsgründen, etwa durch den Anschluß an die leicht übersehbaren Verhältnisse an der Oberfläche.

zu setzen¹²⁾ und dann die Formeln (III) in eine Reihe nach Potenzen von ξ zu entwickeln. Man erhält so die Beziehungen

$$S_{\{x\}}^{(III)} = \frac{1}{\pi \rho c_t^2 t \cos^3 2\gamma} \sqrt{\frac{(1 - \sqrt{1 - \lambda}) (\sin 2\gamma)^3}{\xi (1 - \lambda)}} \left\{ \frac{-\cos \gamma}{\sin \gamma} \right\} (\cos 2\gamma \sigma_1 + \sin 2\gamma \tau_1) \quad (5.8).$$

Sie stimmt für $\lambda \ll 1$ mit der Entwicklung (5.6) überein, wenn man dort $\zeta \approx \lambda \xi^2/2$ und $\vartheta \approx \gamma + \xi$ setzt¹³⁾. Sie deckt sich für $\lambda \approx 1$ mit der Entwicklung (5.4), wenn man dort ebenfalls $\vartheta \approx \gamma + \xi$ setzt, aber wegen (5.7) jetzt $R^2 \approx c_t^2 t^2 \{1 + \xi^2(1 - \lambda)\}$ einführt.

Der Punkt C erweist sich, ähnlich wie der Punkt A , als ein im Sinn der Mathematik wesentlich singulärer Punkt, in dessen Umgebung die Funktionswerte von S_x und S_z bei Annäherung an denselben ($\xi \rightarrow 0$) wesentlich vom Wert eines anderen Parameters, eben des Parabelindex λ abhängen. Für kleine ξ wachsen S_x und S_z beim Übergang von $\lambda = 0$ nach $\lambda = 1$ auf kleinstem Raumbereich vom Wert 0 bis zu extrem großen Werten an.

¹²⁾ Die Kurven $\lambda = \text{konst}$ stellen somit Parabeln dar, welche durch den Punkt C laufen und hier die Kopfwellenfront als gemeinsame Tangente besitzen. Letztere ergibt sich aus (5.7) für $\lambda = 0$, die Schmiegungsparabel an die Stoßfront $R = c_t t$ für $\lambda = 1$.

¹³⁾ Man vergleiche hierzu die Darstellungen (5.5) und (5.7).

Eingegangen am 3. Juli 1949.

Morphologisch homogene Funktionen und ihre Erzeugung durch statistische Superposition von Elementfunktionen. II

2. Teil: Einige Hinweise und Beispiele zur Anwendung der Theorie

Von Hanswalter Giesekeus in Göttingen

Es wird ausgeführt, wie man aus dem Produktdurchschnitt oder dem Spektrum morphologisch homogener Funktionen (mhF), die durch statistische Superposition quadratisch integrierbarer Elementfunktionen erzeugt worden sind, Rückschlüsse auf die mittlere Gestalt dieser Elemente ziehen kann, und dies wird speziell am Beispiel einer solaren Funktion erläutert. Abschließend folgen einige Bemerkungen über anderes Schrifttum zum Thema der mhF, insbesondere wird das Bartelssche Persistenzkriterium diskutiert.

The product-average and the spectrum of morphologically homogenous functions (mhF), generated by statistical superposition of element-functions, are considered as basis for inferences on the average shape of these elements. This is discussed for the exemple of a solar function. Finally, a few remarks on the literature on mhF are given, especially on Bartels' persistence criterion.

En partant du produit moyen et du spectre de fonctions de morphologie homogène (mhF), construites par superposition statistique de fonctions d'élément, des conclusions sont tirées sur la forme moyenne de ces éléments, et cela est éclairci par l'exemple d'une fonction solaire. Enfin quelques remarques sont faites concernant la littérature sur les mhF et spécialement le criterium de persistance de Bartels.

В этой работе показывается, как на основании „среднего произведения“ и „спектра“ морфологически однородных функций (mhF), полученных статистическим наложением квадратически интегрируемых функций-элементов, можно судить о средней форме этих элементов. Это поясняется на примере солярной функции. В заключение рассматриваются некоторые другие работы по вопросу mhF, в особенности обсуждается Бартелевский критерий персистенции (постоянства).

I. Einleitung

Wir haben im ersten Teil dieser Arbeit morphologisch homogene Funktionen (mhF) aus Elementfunktionen aufgebaut, d. h. wir haben unter der Voraussetzung einer statistischen Verteilung berechnet, wie der Produktdurchschnitt oder das Spektrum der mhF aussehen muß, wenn die entsprechenden Größen für die Elementfunktionen bekannt sind. In der Anwendung wird diese Fragestellung von völlig untergeordneter Bedeutung sein gegenüber ihrer Umkehrung: Was kann man aus dem Produktdurchschnitt bzw. dem Spektrum der mhF in bezug auf die sie erzeugenden Elemente schließen? Beide Fragestellungen sind ihrem Wesen nach völlig verschieden: Die erste ist absolut eindeutig, die zweite dagegen unendlich vieldeutig. Aber es ist ja nicht so, daß man nur auf den Produktdurchschnitt bzw. das Spektrum allein angewiesen ist. Vielmehr wird man qualitativ stets wissen, von welchem Typ die untersuchte Funktion ist, z. B. ob ihre Elementfunktionen gleichgestaltig angenommen werden können bzw. mit welcher ungefähren Verteilung ihre Gestalt variabel ist, ob eingeprägte Perioden vorhanden sind, ob die Dichtefunktion konstant, periodisch oder selbst wieder eine (nicht rein periodische) mhF ist, endlich, ob die Elementfunktionen statistisch unabhängig verteilt sind oder aber eine positive,

negative oder oszillierende Anomalie zu erwarten ist. Das hier aufgezogene Problem zerfällt in zwei Teile: Zuerst muß man vom Produktdurchschnitt $K(\tau)$ bzw. dem Spektrum $\tilde{K}(\omega)$ der mhf auf das mittlere Produktintegral $k(\tau)$ bzw. Spektrum $\tilde{k}(\omega)$ der Elementfunktionen schließen und dann aus diesen Größen die mittlere Gestalt $f(t)$ der Elemente ermitteln.

II. Der Schluß von $K(\tau)$ bzw. $\tilde{K}(\omega)$ auf $k(\tau)$ bzw. $\tilde{k}(\omega)$

§ 1. Die Funktion der Sonnenfleckenflecken

Da es für die Lösung des vorstehenden Problems sicher kein allgemein anwendbares Rezept gibt, wollen wir uns darauf beschränken, ein spezielles Beispiel zu diskutieren, nämlich die Funktion der Sonnenfleckenflecken, der sogenannten Greenwicher Areale. (Siehe dazu: Waldmeier [1].) Die Elementfunktionen (nullter Ordnung) sind hier durch die Flächen der einzelnen Flecken, die (der Dichte zugeordneten) Elementfunktionen erster Ordnung durch die Gesamtfläche der Flecken einer Gruppe, diejenigen der zweiten Ordnung durch die Flächen aller Flecken gegeben, die zu ein und demselben Zyklus gehören.

Bild 1 gibt nun den Produktdurchschnitt dieser Funktion schematisch wieder. Links und rechts stehen beide Male dieselben Größen, nur ist der Abszissenmaßstab verschieden gewählt. Wir erkennen sofort, daß dieser Produktdurchschnitt sich in mehrere Anteile zerlegen läßt. Da ist zuerst der innerhalb weniger Tage abgeklungene Anteil K_E (oberhalb der punktierten Linie), der den kurzlebigen Einzelflecken zuzuordnen ist. Er wird in der praktischen Analyse wohl immer nur als „Störung“ angesehen werden. Dann folgt der Anteil K_G der Fleckengruppen. Diesem ist in auffälliger Weise eine periodische Funktion mit 27-tägiger Periode multiplikativ überlagert — der Einfluß der Sonnenrotation. Wenden wir uns nun dem langsam veränderlichen

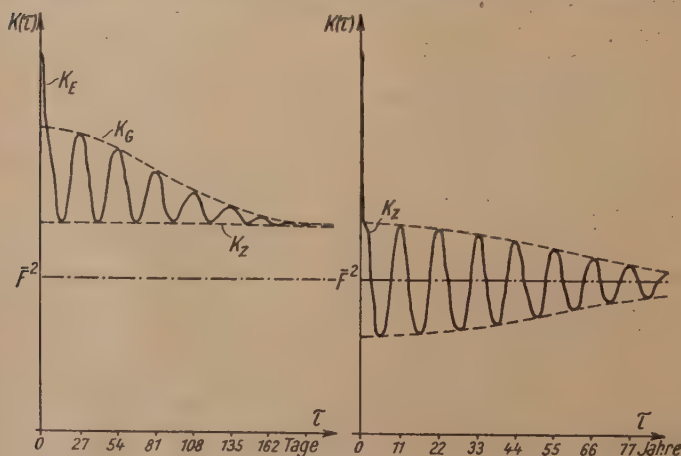


Abb. 1. Der Produktdurchschnitt der Sonnenfleckenflecken (schematisch). Links der kurzperiodische, rechts der langperiodische Gang

man auf innere Zusammenhänge zwischen den Elementen der verglichenen Funktionen, aus Variationen der überlagerten Rotationsperiodizitäten auf die „Randverdunklung“ der einzelnen Strahlungsarten und damit auf die optischen Tiefen ihrer Quellen schließen, usw.

Es ließe sich eine Fülle weiterer Beispiele anführen, doch müssen diese wenigen Andeutungen hier genügen, sollte ja damit nur gezeigt werden, daß man trotz jener unendlichen Vieldeutigkeit in der Fragestellung in praktischen Fällen doch sehr oft mit ausreichender Genauigkeit auf die Gestalt der Produktintegrale oder Spektren der Elementfunktionen, bzw. die Produktdurchschnitte oder Spektren der den Elementfunktionen eingeprägten periodischen Funktionen schließen kann.

§ 2. Einige Beispiele für den Einfluß der statistischen Anomalie

Zu einem Punkt sollen indessen noch einige weitere Bemerkungen folgen, nämlich zum Einfluß der statistischen Anomalie. Diese wird oft nicht quantitativ zu bestimmen sein, sondern nur ganz grob abgeschätzt werden können. Es sind aber auch Fragestellungen zu erwarten, wo man gerade den Produktdurchschnitt (bzw. das Spektrum) dazu benutzen wird, um die Anomalie zu bestimmen. Dazu muß natürlich die mittlere Gestalt der Elementfunktionen bekannt sein.

¹⁾ In dem Anteil K_G dagegen ist keine Anomalieverzerrung zu erwarten, da die Fleckengruppen auf der Sonnenoberfläche in ihrer heliographischen Länge statistisch unabhängig verteilt sind.

Teil K_Z zu, so haben wir auch hier wieder eine ausgeprägte Periodizität. Diese hat jedoch ihre Ursache nicht in irgendeiner Rotation, sondern in einer sehr langlebigen oszillierenden Anomalie der Zyklenverteilung¹⁾. (Näheres darüber s. § 2, insbesondere Bild 3.)

Alle in der Einleitung zum 1. Teil genannten solaren Funktionen haben nun qualitativ die gleichen Eigenschaften wie die oben diskutierte Funktion der Fleckenflächen. Auf Grund der feineren Unterschiede zwischen ihren Produktdurchschnitten (bzw. Spektren) aber kann man wichtige Aussagen machen: Aus den Unterschieden in der Lebensdauer kann

Man kann dem Produktdurchschnitt u. U. das Vorhandensein einer Anomalie sofort ansehen, nämlich dann, wenn diese negativ ist und die Elementfunktionen überall positiv (oder null) sind, oder wenn die Anomalie oszilliert und die Elemente weder selbst Periodizitäten enthalten, noch ihnen solche multiplikativ überlagert sind (im Sinne von Rotationseinflüssen usw.).

Es sei ein ganz einfaches Beispiel einer Funktionen mit negativer Anomalie aufgezeigt, nämlich die im 1. Teil, Kap. III. § 2 behandelte mhF, wenn man jede zweite Elementfunktion wegläßt. Aus Gl. (67) folgt für die Wahrscheinlichkeit der Abstände — wir müssen nur c durch $2c$ und n durch $2n$ ersetzen:

$$W_n(\vartheta) = 2c \frac{(2c\vartheta)^{2n-1}}{(2n-1)!} e^{-2c\vartheta} \dots \dots \dots (78).$$

Dann nimmt nach Gl. (69) die Anomalie die Gestalt

$$u(\vartheta) = c \{ 2 \operatorname{Si} (2c|\vartheta|) e^{-2c|\vartheta|} - 1 \} = -c e^{-4c|\vartheta|} \dots \dots \dots (79)$$

an, und das reduzierte Produktintegral lautet damit:

$$\kappa(\tau) = k(\tau) - c \int_{-\infty}^{\infty} e^{-4c|\vartheta|} k(\tau - \vartheta) d\vartheta \dots \dots \dots (80).$$

Da c im Exponenten der e -Funktion steht, so ist die „Mulde“ für kleine c ganz flach und wird mit wachsender Konzentration immer enger und tiefer. Dabei bleibt aber ihr Inhalt unabhängig von c stets $s^2/2$ (d. i. die Hälfte des Inhalts von $k(\tau)$).

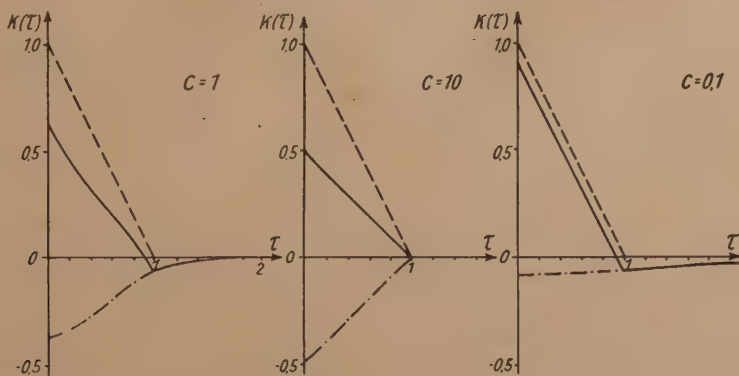


Abb. 2. Das reduzierte Produktintegral der „Rechteckfunktion“ mit negativer Anomalie (nach Gl. (79)) für verschiedene Konzentrationen

Dies zeigt uns Abb. 2 deutlich. Als besonders einfache Elementfunktion wurde hier die „Rechteckfunktion“ gewählt. Ihre Definition und ihren Produktionsdurchschnitt (in der Abbildung die gestrichelte Gerade) s. Gl. (88) und (88a). Damit nimmt das reduzierte Produktintegral die Form an:

$$\kappa(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2} (1 - |\tau|) + \frac{1}{8c} (e^{-4c|\tau|} + e^{-4c} \operatorname{Co} \int 4c\tau) & \text{im Intervall } (-1,1) \\ -\frac{\operatorname{Co} \int 4c - 1}{8c} e^{-4c|\tau|} & \text{außerhalb} \end{cases} \dots \dots (81).$$

Diese Funktion ist in der Abbildung für die c -Werte 1, 10 und 0,1 dargestellt. Im Grenzfall ganz kleiner Konzentration strebt $\kappa(\tau)$ gegen $k(\tau)$, im entgegengesetzten Grenzfall $c \rightarrow \infty$ gegen $1/2 k(\tau)$, während für $c \approx 1$ die Verzerrung am deutlichsten in Erscheinung tritt.

Wenn wir statt der oben betrachteten mhF eine solche betrachten, wo anstatt jeder zweiten nur jede vierte Elementfunktion stehengelassen wurde, so erhalten wir eine Anomalie mit einer (wenn auch sehr schnell abklingenden) Oszillation:

$$u(\vartheta) = -c \{ e^{-8c|\vartheta|} + 2 e^{-4c|\vartheta|} \sin 4c|\vartheta| \} \dots \dots \dots (82).$$

Um zu zeigen, wie kompliziert in der Praxis auftretende Anomalien sein können, sei als Beispiel zum Schluß die empirisch gewonnene Anomalie der Verteilung der Sonnenfleckenzyklen dargestellt und diskutiert (Abb. 3).

Es liegen die Daten von 30 Zyklen aus den Jahren 1610—1937 zugrunde (nach Waldmeier [1]). Der mittlere Abstand zweier benachbarter Zyklen ist 11,02 Jahre, also $c = 0,09/\text{Jahr}$. Die einzelnen Zyklen wurden, um die Rechnung zu vereinfachen, als gleichgestaltig behandelt, doch

dürfte dies das Ergebnis nicht merklich ändern. Aus der Abbildung sehen wir, wie stark die Verteilung von der Normalverteilung abweicht. Bis zum 9. Glied stehen die einzelnen W_n -Summanden getrennt nebeneinander, um sich von da ab erst allmählich zu überlappen. Man kann aus

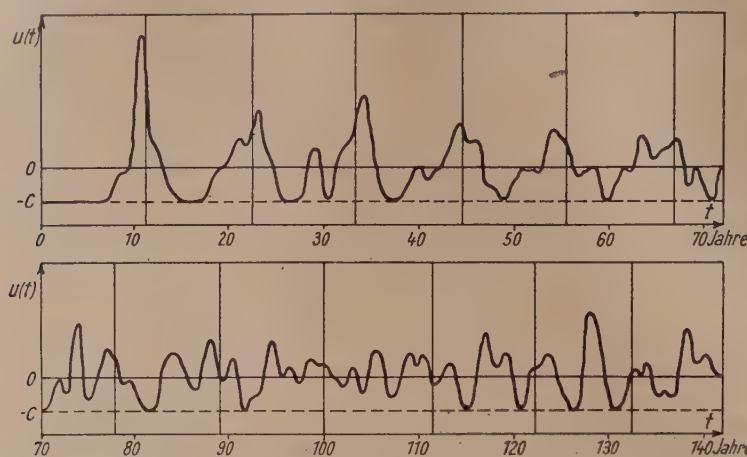


Abb. 3. Die Anomalie in der Verteilung der Sonnenfleckenzyklen.²⁾ (Die vertikalen Geraden teilen die Abzisse in Intervalle von der Länge des mittleren Abstands zweier benachbarter Zyklen ein)

diesem Bild schon weitgehend erkennen, wie das zugehörige $K(\tau)$ aussehen wird (s. Abb. 1): Die Oszillation wird erst nach ca. 10 Zyklen abgeklungen sein; in der Sprache der Geophysiker ausgedrückt: die Wiederholungstendenz hat eine Dauer von etwa 100–120 Jahren.

III. Der Rückschluß von $k(\tau)$ bzw. $\tilde{k}(\omega)$ auf $f(t)$ und von $KP(\tau)$ bzw. $\tilde{K}P(\omega)$ auf $P(t)$

§ 1. Die Problemstellung

Wir nehmen an, daß wir das im vorhergehenden Kapitel beschriebene Problem gelöst hätten und müssen nun noch den zweiten Schritt zurück tun, nämlich von den Produktintegralen der Elementfunktionen bzw. den Produktionsdurchschnitten der eingepägten Funktionen³⁾ auf diese selbst zurückschließen. Das ist, wenn wir von $k(\tau)$ ausgehen, das Problem der Auflösung einer einfachen nichtlinearen Integralgleichung vom Faltungstyp, wenn wir von $\tilde{k}(\omega)$ ausgehen dagegen nur das Ausziehen einer Quadratwurzel

$$|\tilde{f}(\omega)| = \sqrt{\tilde{k}(\omega)} \quad \dots \dots \dots (83)$$

und anschließende Fourier-Transformation. Aber, wenn wir die Aufgabe von dieser Seite her sehen, wird sofort das Hauptproblem deutlich: $f(t)$ ist $\tilde{f}(\omega)$ äquivalent, $\tilde{k}(\omega)$ liefert aber nur dessen Betrag, während die Phase durch unser Verfahren (darauf wurde im 1. Teil, Kap. II. § 2 bereits hingewiesen), prinzipiell nicht bestimmt werden kann⁴⁾. Unser Problem hat also wieder eine unendliche Mannigfaltigkeit von Lösungen, da jede Funktion

$$f(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \sqrt{\tilde{k}(\omega)} \frac{e^{i[\varphi(\omega) + \omega t]}}{\sqrt{2\pi}} d\omega \quad \dots \dots \dots (84)$$

mit willkürlich vorgegebenem $\varphi(\omega)$ ⁵⁾ eine Lösung darstellt. Die Aufgabe wird also wieder darin bestehen, zusätzliche Bedingungen, denen $f(t)$ genügen muß, aufzufinden und zu versuchen, damit das Problem eindeutig zu machen. Solche Nebenbedingungen können z. B. sein: Verschwinden von $f(t)$ außerhalb eines endlichen t -Intervalls, Annahmen nur nichtnegativer Werte, Symmetrie, monotoner Abfall nach beiden Seiten von einer Maximumstelle aus, usw. Mathematisch

²⁾ Das Stärkerwerden der Schwankung am Ende der dargestellten Kurve ist nicht reell, sondern findet seinen Grund darin, daß die Zahl der zur Berechnung von W_n benutzten Werte mit wachsendem n immer kleiner wird.

³⁾ Wir wollen diesen dem ersten ganz ähnlichen Fall im folgenden nicht immer mitnennen.

⁴⁾ Wir verdeutlichen das noch einmal am Beispiel der einfachsten mhF aus dem 1. Teil, Kap. III § 2: Wenn diese Funktion eine definierte Phase haben soll, so muß die Phasenfunktion von $S(\omega)$ (s. Gl. (34))

$$\Phi(\omega) = \text{Im} \left\{ \log \sum_{j=1}^N e^{-i\omega t_j} \right\}$$

für alle N einen eindeutigen Erwartungswert besitzen. Das ist aber nicht der Fall.

⁵⁾ Genauer: für $\omega > 0$, da selbstverständlich die Bedingung $\varphi(-\omega) = -\varphi(\omega)$ gelten muß.

werden diese Fragen vielleicht sehr verwickelter Natur sein, für die Praxis wird jedoch in vielen Fällen die Eindeutigkeit innerhalb aller zur Konkurrenz zugelassenen Funktionen außer Frage stehen.

§ 2. Auflösung mit Hilfe von Modellfunktionen

Es sollen zwei Verfahren skizziert werden, die, wenn wir uns von der Eindeutigkeit überzeugt haben und wir $f(t)$ nur in seiner ungefähren Gestalt bestimmen wollen, verhältnismäßig schnell zum Ziel führen. Das erste Verfahren geht vom Produktintegral aus und beruht ganz einfach auf dem Vergleichen der vorliegenden Funktion mit einem Satz von Modellfunktionen. Damit uns das anschaulich wird, müssen wir uns einige Eigenschaften von $k(\tau)$ vergegenwärtigen:

Durch das Produktintegral sind uns zwei Größen der Elementfunktionen unmittelbar gegeben, und zwar ihr linearer Inhalt s durch

$$\int_{-\infty}^{\infty} k(\vartheta) d\vartheta = s^2 \quad (85)$$

und ihr quadratischer Inhalt q durch

$$k(0) = \int_{-\infty}^{\infty} f^2(t) dt = q \quad (86).$$

Wenn $k(\tau)$ von einem Wert τ_0 ab stets verschwindet, so gibt diese Größe zugleich das Intervall an, in welchem $f(t)$ allein von Null verschieden ist⁶⁾. Bei periodischem Produktdurchschnitt ist deren Periodenlänge zugleich die Periodenlänge der gesuchten Funktion. In diesem Falle entspricht dem linearen bzw. quadratischen Inhalt ein linearer bzw. quadratischer Mittelwert.

Eine nullte Näherung ist nun bereits dadurch gegeben, daß man durch die Größen q und s der Elementfunktion $f(t)$ eine „äquivalente Rechteckfunktion“

$$f_R(t) = \begin{cases} \frac{q}{s} & \text{im Intervall } \left(-\frac{s^2}{2q}, \frac{s^2}{2q}\right) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (87)$$

zuordnen kann. $q/s = a$ heiße die „äquivalente Amplitude“, $s^2/q = l$ die „äquivalente Lebensdauer“ von $f(t)$. Mit Hilfe dieser Größen normieren wir nun unser Produktintegral so, daß sein Anfangswert und sein Inhalt beide gleich eins werden. Dann stellen wir uns eine Folge von Modellfunktionen her, welche ebenfalls dieser Normierungsbedingung genügen und vergleichen den Produktdurchschnitt der zu bestimmenden Funktion einfach mit denjenigen der bekannten Modellfunktionen. Auf diese Weise können wir $f(t)$ im Prinzip beliebig genau approximieren.

Wir wollen hier nur ganz wenige solcher normierter Modellfunktionen angeben, deren Produktdurchschnitte sich durch elementare Ausdrücke darstellen lassen:

1. Die (bereits mehrfach genannte) „Rechteckfunktion“

$$f_1(t) = \begin{cases} 1 & \text{im Intervall } \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (88).$$

Ihr Produktintegral ist:

$$k_1(\tau) = \begin{cases} 1 - |\tau| & \text{im Intervall } (-1, 1) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (88a),$$

2. die „symmetrische Dreieckfunktion“

$$f_2(t) = \begin{cases} \frac{2}{3} - \frac{9}{4} |t| & \text{im Intervall } \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (89)$$

$$k_2(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{27}{8} \tau^2 + \frac{81}{32} |\tau|^3 & \text{im Intervall } \left(-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) \\ 2 - \frac{9}{2} |\tau| + \frac{27}{8} \tau^2 - \frac{27}{32} |\tau|^3 & \text{im Intervall } \left(-\frac{4}{3}, -\frac{2}{3}\right) \text{ und } \left(\frac{2}{3}, \frac{4}{3}\right) \\ 0 & \text{außerhalb} \end{cases} \quad (89a),$$

3. die „symmetrische e-Funktion“

$$f_3(t) = 2 e^{-4|t|} \quad (90)$$

$$k_3(\tau) = (1 + 4|\tau|) e^{-4|\tau|} \quad (90a),$$

⁶⁾ Allerdings ist, wie wir an den folgenden Beispielen sehen können, dieser Wert in der Praxis meist nur sehr ungenau zu bestimmen, da $k(\tau)$ die τ -Achse fast immer mit horizontaler Tangente berührt.

4. die cos-gestaltige Elementfunktion

$$f_4(t) = \begin{cases} \frac{4}{\pi} \cos \frac{8}{\pi} t \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(-\frac{\pi^2}{16}, \frac{\pi^2}{16}\right) \dots\dots (91) \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

$$k_4(\tau) = \begin{cases} \left(1 - \frac{8}{\pi^2} |\tau|\right) \cos \frac{8}{\pi} \tau + \frac{1}{\pi} \sin \frac{8}{\pi} |\tau| \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(-\frac{\pi^2}{8}, \frac{\pi^2}{8}\right) \dots\dots (91a), \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

5. die cos²-gestaltige Elementfunktion

$$f_5(t) = \begin{cases} \frac{4}{3} \cos^2 \frac{2\pi}{3} t \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(-\frac{3}{4}, \frac{3}{4}\right) \dots\dots (92) \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

$$k_5(\tau) = \begin{cases} \left(\frac{1}{3} - \frac{2}{9} |\tau|\right) \left(2 + \cos \frac{4\pi}{3} \tau\right) + \frac{1}{2\pi} \sin \frac{4\pi}{3} |\tau| \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}\right) (92a), \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

6. die „Glockenfunktion“

$$f_6(t) = \sqrt{2} e^{-2\pi t^2} \dots\dots\dots (93),$$

$$k_6(\tau) = e^{-\pi \tau^2} \dots\dots\dots (93a).$$

Nach diesen symmetrischen noch einige extrem unsymmetrische Elementfunktionen:

7. die „rechtwinklige Dreieckfunktion“

$$f_7(t) = \begin{cases} \frac{3}{2} - \frac{9}{8} t \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(0, \frac{4}{3}\right) \dots\dots\dots (94) \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

$$k_7(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{9}{8} |\tau| + \frac{27}{128} |\tau|^3 \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall} \left(-\frac{4}{3}, \frac{4}{3}\right) \dots\dots (94a), \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

8. die „abgeschnittene e-Funktion“

$$f_8(t) = \begin{cases} 2 e^{-2t} \\ 0 \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{im Intervall } (0, \infty) \dots\dots\dots (95) \\ \text{au\ss}erhalb \end{array}$$

$$k_8(\tau) = e^{-2|\tau|} \dots\dots\dots (95a).$$

Die numerischen Werte der angegebenen Produktintegrale sind in Tafel 1 zusammengestellt. Es fällt dabei auf, wie wenig sich die Werte der verschiedenen symmetrischen Funktionen (k_2 bis k_6) voneinander unterscheiden, ebenso diejenigen der unsymmetrischen Funktionen (k_7 und k_8). Dagegen zeigt der Verlauf der symmetrischen gegenüber den verwandten unsymmetrischen Funktionen bemerkenswerte Unterschiede, wie Abb. 4 zeigt: Die Funktionen vom ersten Typ

Tafel I

τ	k_1	k_2	k_3	k_4	k_5	k_6	k_7	k_8
0,0	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000	1,000
0,1	0,900	0,969	0,939	0,972	0,974	0,969	0,888	0,818
0,2	0,800	0,885	0,809	0,887	0,903	0,880	0,777	0,670
0,3	0,700	0,764	0,663	0,767	0,768	0,754	0,668	0,549
0,4	0,600	0,622	0,525	0,626	0,622	0,605	0,564	0,447
0,5	0,500	0,473	0,406	0,478	0,472	0,456	0,464	0,368
0,6	0,400	0,331	0,309	0,340	0,332	0,324	0,371	0,302
0,7	0,300	0,216	0,231	0,220	0,215	0,215	0,284	0,247
0,8	0,200	0,128	0,172	0,125	0,125	0,134	0,208	0,202
0,9	0,100	0,068	0,126	0,060	0,065	0,079	0,142	0,166
1,0	0,000	0,031	0,096	0,021	0,037	0,043	0,086	0,136
1,1	—	0,010	0,066	0,003	0,011	0,022	0,043	0,111
1,2	—	0,004	0,048	~0,000	0,004	0,011	0,014	0,091
1,3	—	~0,000	0,034	0,000	~0,000	0,005	0,002	0,074
1,4	—	0,000	0,024	—	~0,000	0,002	0,000	0,061
1,5	—	—	0,017	—	0,000	0,001	—	0,050
1,6	—	—	0,012	—	—	~0,000	—	0,041

haben (wie alle stetigen Elementfunktionen) die Anfangssteigung $k'(0) = 0$, dagegen diejenigen vom zweiten Typ (wie alle unstetigen Elementfunktionen) eine negative Anfangssteigung (für rechtsseitigen Limes), welche hier stets kleiner ist als diejenige der Rechteckfunktion. Außerdem hat $k(\tau)$ bei den Funktionen vom ersten Typ stets eine Wendetangente an einer endlichen τ -Stelle, bei denjenigen vom zweiten Typ dagegen nicht⁷⁾. Endlich nehmen von einem bestimmten τ ab die $k(\tau)$ -Werte unserer unsymmetrischen Funktionen wesentlich langsamer ab als die der gegenübergestellten symmetrischen Funktionen.

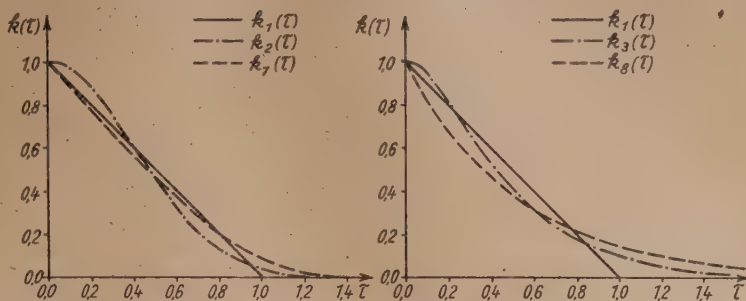


Abb. 4. Produktintegrale verwandter symmetrischer und unsymmetrischer Funktionen (f_1, f_2 und f_3, f_4)

Aus diesen wenigen Beispielen erkennt man schon, was man in einfachen Fällen aus dem Verlauf des Produktdurchschnitts ablesen kann, insbesondere auch, mit welcher Genauigkeit man etwa $f(t)$ bestimmen kann, wenn $k(\tau)$ mit einer vorgegebenen Unsicherheit behaftet ist. Die Methode muß selbstverständlich im Falle, daß der lineare Inhalt $s = 0$ ist, insofern modifiziert werden, als man an Stelle der Bedingung $s = 1$ dann eine andere Normierungsbedingung wählen muß.

§3. Auflösung durch Fourier-Analyse

Die zweite Methode ist auf symmetrische bzw. antisymmetrische Elementfunktionen zugeschnitten und geht vom Spektrum aus. Da man ja in der Praxis stets vom Fourier-Integral zur Fourier-Reihe übergehen kann, und obige Bedingung für die Phase dann nur die Werte $+1$ und -1 übrig läßt, so dürfte bei den meist nur wenigen zu berücksichtigenden Koeffizienten die Wahl der richtigen Vorzeichen keine besondere Mühe machen.

Ein mathematisch ganz analoges Problem liegt vor bei der Bestimmung von Kristallstrukturen durch Röntgen-Interferenzen. Die gemessenen Linien- bzw. Reflexintensitäten sind dem Betragsquadrat der Koeffizienten der (natürlich hier dreidimensionalen) Fourierentwicklung der Ladungsverteilung direkt proportional. Die Phasen bleiben aber auch hier unbestimmt und man ist auf Probiervverfahren angewiesen⁸⁾.

Wieder müssen, wie auch im vorigen Kapitel, diese wenigen Andeutungen genügen. Sie sollten ja nur einige Fingerzeige für die Anwendung der in dem ersten Teil der Arbeit dargestellten Theorie geben. In der Praxis wird wohl jeder Problemstellung eine eigene, von allen andern mehr oder weniger verschiedene Methode angemessen sein.

IV. Einige Bemerkungen zum Schrifttum über morphologisch homogene Funktionen.

Das Bartelssche Persistenzkriterium

§1. Schrifttum über Periodenforschung usw.

Es kann nicht der Sinn dieses Schlußkapitels sein, einen erschöpfenden Überblick über das Schrifttum zum Thema der mhF zu geben, sondern es sollen hier nur einige zusammenfassende Arbeiten genannt werden, deren Fragestellung mit der unsrigen besonders nahe verwandt ist, und welche diese deshalb in gewissem Sinne ergänzen.⁹⁾ Da wäre zuerst die Monographie von K. Stumpf [3] zu nennen. Sie enthält — außer einer ausführlichen Darstellung der Approximation empirischer Funktionen, (die u. U. in Form von gleichabständigen diskreten Zahlenfolgen gegeben sein können,) durch Fourier-Reihen sowie praktischer numerischer und instrumenteller Methoden der Harmonischen Analyse — die Schustersche Periodogramm-Theorie, d. i. eine statistische Betrachtung über die „Realität“ der aufgefundenen Periodizitäten mit Hilfe des zentralen Expektanzbegriffs¹⁰⁾. Ebenso wird der unserem Produktdurchschnitt äquivalente Autokorre-

⁷⁾ An dieser Stelle sei auf die Existenz der einfachen Beziehung zwischen $k''(\tau)$ und $f'(t)$:

$$k''(\tau) = - \int_{-\infty}^{\infty} f'(t) f'(t - \tau) dt,$$

die aus der Definitionsgleichung durch partielle Integration sofort folgt, hingewiesen.

⁸⁾ Einen zusammenfassenden Bericht hierzu gibt A. Sommerfeld [2].

⁹⁾ In diesen Arbeiten finden sich ausführliche Literaturnachweise, insbesondere in [3], [4] und [5].

¹⁰⁾ Die „Expektanz“ steht in einem engen inneren Zusammenhang mit unserm $\bar{K}(\omega)$.

lationskoeffizient¹¹⁾ definiert und ausführlich diskutiert. Diese Untersuchungen werden durch die (zum Teil auch von Stumpff referierten) Arbeiten von J. Bartels [4—7] weitergeführt. Das hierin wesentlich Neue ist, abgesehen von einer überaus anschaulichen Darstellung der harmonischen Analyse mit der sogenannten „Periodenuhr“ (harmonic dial), die Ausdehnung der Schusterschen Überlegungen auf Reihen mit „Erhaltungstendenz“. Es werden hierfür Maßzahlen eingeführt und ihr Einfluß wird an zahlreichen Beispielen erläutert. Besonders eng aber berühren sich die dortigen Untersuchungen über die Unterscheidung von „persistenten“ und „quasipersistenten“ Periodizitäten — in unserer Ausdrucksweise: von echten und virtuellen Spektrallinien — mit dem Gegenstand der vorliegenden Arbeit. Auf die verschiedenartige Beleuchtung dieses Problems mit den früher genannten Begriffen und insbesondere demjenigen der „Irrfahrt“ (random walk) kann hier nicht eingegangen werden, wohl aber wollen wir das all diese Überlegungen implizit in sich enthaltende Persistenzkriterium in unserer Sprache noch kurz formulieren und damit einen letzten Schritt von der Abstraktion der Theorie zur Wirklichkeit der Anwendung zurück tun: Wir wollen nämlich die Kenntnis der mhF anstatt im ganzen unendlichen Intervall nur in einem beschränkten Teilintervall voraussetzen¹²⁾.

§ 2. Das Bartelssche Persistenzkriterium

Wir teilen das ganze — vorerst noch unendlich ausgedehnt gedachte — t -Intervall in lauter Teilintervalle der Größe h ein und betrachten den Mittelwert der Spektren dieser Abschnitte als Funktion von h :

$$\tilde{K}(h, \omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{(2N+1)h} \sum_{n=-N}^N \left| \int_{(n-1/2)h}^{(n+1/2)h} F(t) \frac{e^{-i\omega t}}{\sqrt{2\pi}} dt \right|^2 \dots \dots \dots (97).$$

Wir bestimmen seine Gestalt für den Fall der fastperiodischen Funktion [s. Gl. (10a) und (11a)] und erhalten dafür nach einfacher Rechnung:

$$\tilde{K}(h, \omega) = \frac{h}{2\pi} \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\tilde{\Psi}(\omega_n)|^2 \left(\frac{\sin \frac{h(\omega - \omega_n)}{2}}{\frac{h(\omega - \omega_n)}{2}} \right)^2 \dots \dots \dots (98).$$

Das ist nun auch ein virtuelles Linienspektrum mit einer ganz speziellen einfachen Linienform. Aber — und darin liegt das entscheidende Moment — diese Form ist von h abhängig, derart, daß die Höhe der Linien linear mit h wächst und die Breite entsprechend abnimmt, so daß ihr Inhalt unabhängig von h erhalten bleibt. Ihre Halbwertsbreite ist in guter Näherung gegeben durch:

$$\delta \omega_h^{(1/2)} \approx \frac{2\pi}{h}.$$

Das Abschnittsspektrum $\tilde{K}(h, \omega)$ einer nicht rein periodischen mhF läßt sich nicht in dieser einfachen Weise explizit angeben, aber man überlegt sich leicht, daß sich dieses, wenn nur h genügend groß gewählt wird, beliebig wenig ändert, also von einer gewissen h -Grenze ab praktisch mit $\tilde{K}(\omega)$ gleichgesetzt werden kann, abgesehen natürlich von eventuell vorhandenen ω_n -Stellen (d. h. persistenten Periodizitäten) und deren unmittelbarer Umgebung.

Auf der Erkenntnis dieses unterschiedlichen Verhaltens beruht das Bartelssche Kriterium, welches wir ganz kurz in folgender Weise formulieren können:

Ist H die Länge des zur Analyse benutzten t -Intervalls, so ist jeder echten (= persistenten) Periode eine Spektrallinie zugeordnet, deren Halbwertsbreite den Erwartungswert

$$\delta \omega_H^{(1/2)} \approx \frac{2\pi}{H} \dots \dots \dots (99)$$

hat. — Dies ist eine notwendige, nicht aber hinreichende Bedingung. Eine solche kann es prinzipiell auch gar nicht geben. — Alle Linien mit wesentlich größeren Halbwertsbreiten gehören dagegen sicher zu quasipersistenten Periodizitäten¹³⁾.

¹¹⁾ Zwischen beiden besteht die Beziehung:

$$R(\tau) = \frac{K(\tau)}{K(0)}.$$

Der Ausdruck „Autokorrelationskoeffizient“ für $R(\tau)$ rührt daher, daß man diese Transformation als Korrelation der Funktion $F(t)$ mit der gleichen, nur um τ verschobenen Funktion $F(t-\tau)$ auffassen kann.

¹²⁾ Der andere noch mögliche Schritt, nämlich von der kontinuierlich gegebenen Funktion zur diskreten Reihe soll dem Leser überlassen bleiben, da dieser in unserm Fall stets genau so zu vollziehen ist wie bei den in obigen Arbeiten diskutierten Funktionen.

¹³⁾ Der genannte Autor selbst benutzt nicht die Halbwertsbreite, sondern unmittelbar die oben beschriebene h -Abhängigkeit der Ordinaten zur Fallunterscheidung.

In diesem Falle gibt uns

$$h_{\text{eff}} = \frac{\delta \omega^{(1/2)}}{2\pi} \dots \dots \dots (100)$$

eine Maßzahl für die Größenordnung der mittleren Lebensdauer der zugehörigen Periodizität, die wir deshalb „effektive Lebensdauer“ nennen wollen.

Überträgt man diese Überlegungen auf den Produktdurchschnitt der mhF, so ergeben diese eine denkbar einfache, fast selbstverständliche Aussage:

Ist H die Länge des zur Analyse benutzten Intervalls, so ist

$$K(H, \tau) = \frac{1}{H} \int_{-H/2+\tau}^{H/2} F(t) F(t-\tau) dt \quad \text{für } \tau \geq 0 \dots \dots \dots (101)$$

nur im Intervall $(-H, H)$ von Null verschieden. Eine persistente Periodizität muß in diesem Fall in diesem ganzen Intervall, wenn auch mit nach beiden Seiten abnehmender Amplitude, vorhanden sein, während alle wesentlich früher abgeklungenen Periodizitäten sicher quasipersistenter Natur sind.

Vergleicht man die vorliegende Arbeit¹⁵⁾ mit den oben besprochenen Abhandlungen, so kann man den wesentlichen Unterschied vielleicht am besten so kennzeichnen: Während diese sich fast ausschließlich auf die Untersuchung persistenter und quasipersistenter Periodizitäten beschränken und die Erhaltungstendenz nur soweit berücksichtigen, als zur Vermeidung von Fehlschlüssen bei statistischen Betrachtungen notwendig ist, wird hier die Erhaltungstendenz¹⁶⁾ selbst, genauer: die sie quantitativ beschreibenden Transformationen Produktdurchschnitt bzw. Spektrum, in den Mittelpunkt der Untersuchung gestellt und aus deren Gestalt auf die innere Struktur der von ihnen repräsentierten mhF geschlossen.

Herrn Prof. Bartels möchte ich für die gegebenen Anregungen und sein förderndes Interesse an dieser Arbeit meinen herzlichen Dank aussprechen.

Schrifttum

- [1] M. Waldmeier: Ergebnisse und Probleme der Sonnenforschung. Akademische Verlagsgesellschaft Leipzig 1941.
- [2] A. Sommerfeld: Über die Fourier-Analyse der Kristalle und die Dichte der Metallelektronen. Naturwiss. 28. (1940) 769—777.
- [3] K. Stumpff: Grundlagen und Methoden der Periodenforschung. Berlin, Springer-Verlag 1937.
- [4] J. Bartels: Random fluctuations, persistence, and quasipersistence in geophysical and cosmical periodicities. Terr. Magn. 40 (1935) 1—60.
- [5] S. Chapman und J. Bartels: Geomagnetism. (Vol. 2, Chapter XVI.) Oxford Univ. Press 1940.
- [6] J. Bartels: Zur Morphologie geophysikalischer Zeitfunktionen. S.-B. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (1935) 504—522.
- [7] J. Bartels: Gesetz und Zufall in der Geophysik. Naturwiss. 31 (1943) 421—435.
- [8] H. Gieseke: Zur Untersuchung quasiperiodischer Funktionen durch Autokorrelation und Periodogramm. Gerl. Beitr. Geophys. 60. (1944) 210—221.

¹⁴⁾ In der Praxis wird man statt dessen $K(H, \tau)$ oft wie folgt definieren:

$$K(H, \tau) = \frac{1}{H-\tau} \int_{-H/2+\tau}^{H/2} F(t) F(t-\tau) dt \dots \dots \dots (101a).$$

Das ist allerdings nur solange vernünftig, wie $\tau \ll H$ ist.

¹⁵⁾ Die Überlegungen des I. Teils, Kap. III, § 2—5 wurden im wesentlichen, allerdings in mathematisch weniger exakter Weise, bereits früher veröffentlicht [8].

¹⁶⁾ Die Wiederholungstendenz erscheint nur als deren Spezialfall.

Eingegangen am 30. Juli 1949.

KLEINE MITTEILUNGEN

Bemerkungen zu einem Einschließungssatz für Eigenwerte

In einer früheren Arbeit¹⁾ wurde vom Verfasser im Rahmen einer Extremalaufgabe eine Verallgemeinerung des bekannten Kryloffschen (= Weinsteinschen) Einschließungssatzes für den Fall einer mehrgliedrigen

Ansatzfunktion $y = \sum_{\nu=1}^k p_{\nu} \varphi_{\nu}(x) = \{\varphi\}_k$ (p_{ν} = Konstanten, φ_{ν} = Koordinatenfunktionen) gewonnen. Um die numerische Arbeit bei der Ausrechnung dieser Schranken herabzudrücken, wurde gezeigt, wie sich dafür Näherungswerte bestimmen lassen. Hier soll vorgeführt werden, daß diese „Näherungswerte“ durchaus selbständige Beachtung verdienen.

Wie früher (in B I) sei eine Integralgleichung

$$y(x) = \lambda \int K(x, s) y(s) ds \dots \dots \dots (1)$$

¹⁾ N. J. Lehmann: Beiträge zur numerischen Lösung linearer Eigenwertprobleme. Z. angew. Math. Mech. (1949), 8, 341—356 und (1950), Heft 1, 2. [Im folgenden kurz als (B I) und (B II) zitiert.] Auch die in vorliegender Mitteilung benutzten Bezeichnungen stammen hieraus.

mit regulärem symmetrischen Kern vorgelegt; Integrationen sind immer über ein festes endliches Grundgebiet erstreckt. Ausgehend von k stückweise stetigen Koordinatenfunktionen $\varphi_\nu(x) = \varphi_\nu^{(0)}(x)$, deren Iterierte $f K(x, s) \varphi_\nu(s) ds$ voneinander linear unabhängig sind²⁾, werden mit

$$\varphi_\nu^{(r)}(x) = \int K(x, s) \varphi_\nu^{(r-1)}(s) ds$$

Schwarzsche Konstanten

$$a_n^{vq} = a_n^{vq} = \int \varphi_\nu^{(m)}(x) \varphi_\nu^{(n-m)}(x) dx$$

$$0 \leq m \leq n = 0, 1, \dots$$

berechnet, (sie sind von m unabhängig) und die symmetrischen Determinanten

$$\left. \begin{aligned} \text{a) } D_k(t, A) &= |a_0^{vq} - (t + A) a_1^{vq} + t A a_2^{vq}| \\ \text{b) } D_k(\infty, A) &= |a_1^{vq} - A a_2^{vq}| \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

$$v, q = 1, 2, \dots, k$$

zusammengestellt.

Von den Ergebnissen in (B II) interessiert hier besonders aus Abschnitt 2, 4 und 6/C:

Satz I: Zwischen jedem reellen Parameter t und jeder Lösung $A_\sigma(k, t)$ von $D_k(t, A) = 0$ liegt mindestens ein Eigenwert der Gl. (1). (Dabei kann auch $A_\sigma(k, t)$ selbst dieser Eigenwert sein.)

Satz II: Näherungen für die Parameterwerte t_M minimaler Schrankenweite $t_M \dots A_M(k, t)$ (es handelt sich allgemein um relative Minima) findet man mit den Lösungen $A_\sigma(k, \infty)$ von $D_k(\infty, A) = 0$ als $A_\sigma(k, \infty)$ nächstgelegene Wurzeln der Gleichung $D_k(t, 2A_\sigma(k, \infty) - t) = 0$ ³⁾.

Diese Ergebnisse lassen sich schnell in eine übersichtlichere und für numerische Rechnung zweckmäßigere Form bringen:

Zuerst wird aus $D_k(\infty, A) = 0$ $A_\sigma(k, \infty) \sigma = 1, 2, \dots, k$ bestimmt. Dann kann mit der Abkürzung

$$A^2 = (A_\sigma(k, \infty) - t)^2 \dots \dots \dots (3)$$

und Gl. (2a) für Satz II

$$D_k(t, 2A_\sigma(k, \infty) - t) = |a_0^{vq} - 2A_\sigma(k, \infty) a_1^{vq} + A_\sigma^2(k, \infty) a_2^{vq} - A^2 a_2^{vq}| = 0 \quad (4)$$

gebildet und gelöst werden. Die A^2 sind dabei alle reell und nicht negativ, sie sind Maximum-Minimum-Werte des Quotienten aus einer nicht negativen und einer positiv-definiten symmetrischen quadratischen Form⁴⁾:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{v, q=1}^k p_v p_q [a_0^{vq} - 2A_\sigma(k, \infty) a_1^{vq} + A_\sigma^2(k, \infty) a_2^{vq}] \\ \sum_{v, q=1}^k p_v p_q a_2^{vq} \\ \frac{\int \{\varphi - A_\sigma(k, \infty) \varphi(1)\}_k^2 dx}{\int \{\varphi(1)\}_k^2 dx} \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

mit

$$\{\varphi\}_k = \sum_{v=1}^k p_v \varphi_v.$$

²⁾ Der zur Gl. (2b) gehörende Quotient quadratischer Formen

$$\frac{\sum_{v, q=1}^k p_v p_q a_1^{vq}}{\sum_{v, q=1}^k p_v p_q a_2^{vq}}$$

hat dann einen positiv-definiten Nenner, die Determinante $D_k(\infty, A)$ also genau k Wurzeln [vgl. auch Gl. (5) und Fußnote 4].

³⁾ In (B II) wurden die Näherungswerte für t_M durch t_M^0 bezeichnet; hier kann die Unterscheidung wegfallen, da nur die zweiten Größen betrachtet werden.

Ebenso ist jetzt die Reihenfolge der $A_\sigma(k, t)$ usw. bei der Nummerierung belanglos — mehrfache Wurzeln werden aber weiterhin ihrer Vielfachheit entsprechend oft gezählt.

⁴⁾ Vgl. z. B. R. Courant und D. Hilbert: Methoden der mathematischen Physik I. Berlin: Julius Springer, 2. Aufl. (1931), 496 S. — hier insbesondere S. 19 ff.

Von den Lösungen der Gl. (4) wird nur die kleinste $A_{k\sigma}^2$ benötigt, da sie nach Gl. (3) dem in Satz II geforderten $A_\sigma(k, \infty)$ nächst benachbarten Parameter t entspricht. Es wird nach Gl. (3):

$$t_M = A_\sigma(k, \infty) \pm A_{k\sigma}; \quad (A_{k\sigma} \geq 0) \dots (6)$$

Schon aus Symmetriegründen (vgl. B II, Abschnitt 4 und 6/C) soll das zugehörige $A_M(k, t_M)$ in der Reihe der t_M selbst vorkommen. Vergleich der Bedingung $D_k(t_M, A_M(k, t_M)) = 0$ und Gl. (4), die von t_M befriedigt wird, bestätigt sofort

$$A_M(k, t_M) = 2A_\sigma(k, \infty) - t_M = A_\sigma(k, \infty) \mp A_{k\sigma}.$$

Zusammen mit Satz I ergibt das

$$|\lambda_S - A_\sigma(k, \infty)| \leq A_{k\sigma} \dots \dots \dots (7)$$

Unter λ_S ist dabei zumindest der $A_\sigma(k, \infty)$ nächstgelegene Eigenwert von Gl. (1) zu verstehen. Allgemeine Überlegungen in (B II), Abschnitt 2, sichern bei geeigneten Annahmen über die Vollständigkeit der φ_ν , daß bei $k \rightarrow \infty$ $A_{k\sigma} \rightarrow 0$ strebt.

Damit ist auch für den Fall eines mehrgliedrigen Ansatzes eine der gewöhnlichen Kryloffschen Schranke analoge Form des Einschließungssatzes nach Satz I und II gefunden; beim eingliedrigen Ansatz geht Gl. (7) unmittelbar in den Satz von Kryloff über. Weiter ist an Gl. (7) die besonders intensive Ausnutzung der $A_\sigma(k, \infty)$ charakteristisch. Diese Größen hatten sich ja schon in (B II) als Eigenwertnäherungen gezeigt. (Und zwar im Gegensatz zu älteren Arbeiten [Ritz-Galerkin] unabhängig von der Definitheit der Aufgabe.)

Stellt man einmal $\lambda_S \approx A_\sigma(k, \infty)$ voran, so wird man bei Betrachtung der Determinante $D_k(t, A)$ in Satz I unmittelbar auf den Ansatz

$$t = A_\sigma(k, \infty) \pm A, \quad A = A_\sigma(k, \infty) \mp A \dots (8)$$

geführt; Einsetzen und die Forderung $|A| = \text{Min}$ gibt dann sofort die Bestimmungsgleichung (4) für $A_{k\sigma}$.

Einen anschaulichen Einblick in das Wesen der Schranken nach Gl. (7) vermitteln besonders Bild 5 und die zugehörigen Bemerkungen im Abschnitt 6/C von (B II); Verallgemeinerungen ermöglicht dabei ein wichtiger Hilfssatz (Stetigkeitssatz):

Satz III: Sind in der Funktionenmannigfaltigkeit $\{\varphi\}_k$ die r -Eigenfunktionen y_{α_i} $i = 1, 2, \dots, r$ der Gl. (1) enthalten, so besteht die mit $D_k(t, A) = 0$ definierte algebraische Kurve $A(k, t) = f(t)$ aus den r -Geradenpaaren $t = \lambda_{\alpha_i}$, $A = \lambda_{\alpha_i}$ $i = 1, 2, \dots, r$ und einem Restteil $A(k - r, t)$, über den sich folgende Angaben machen lassen: $A(k - r, t)$ ist als Funktion der (reellen) Variablen t eine algebraische Kurve $2(k - r)$ -ter Ordnung mit der Symmetriegeraden $t = A$ und den $k - r$ Asymptotenkreuzen

$$t = A_\sigma(k, \infty), \quad A = A_\sigma(k, \infty),$$

$$\sigma = r + 1, r + 2, \dots, k.$$

Alle Kurvenzweige sind — von der jeweils zugehörigen (ungeraden) Polstelle bei $t = A_\sigma(k, \infty)$, $\sigma = r + 1, \dots, k$ abgesehen — von rechts und links stetige reelle und eigentlich monoton wachsende Funktionen von t . Gleichheiten $A(k - r, t) = t$ können nicht mehr vorkommen.

[Mit diesem Satz ist der Verlauf von $A(k, t)$ weitgehend bestimmt; man kann Vorkommnisse wie Rückkehrpunkte u. ä. von vornherein ausschließen.]

Der Satz III folgt auch ohne Bezugnahme auf die Theorie algebraischer Kurven aus der Darstellung und Erklärung nach Abschnitt 1 und 3 von (B II)⁵⁾:

⁵⁾ Gleichungen usw. aus (B II) werden jetzt durch einen Stern gekennzeichnet.

Nach Gl. (2)* sind die $\Lambda(k, t)$ Extremalwerte einer Variationsaufgabe. Konkurrenzfähig ist die Funktionenklasse $\{\varphi\}_k$. Sind darin Eigenfunktionen $y_{\alpha_1}, \dots, y_{\alpha_r}$ enthalten, so lassen sich diese nach dem Schmidtschen Verfahren durch weitere $k-r$ dazu und sogar untereinander orthogonale Funktionen $\bar{y}_{r+1}, \dots, \bar{y}_k$ aus $\{\varphi\}_k$ zu einem System ergänzen, für das $\{\varphi\}_k = \sum_{v=1}^r c_v y_{\alpha_v} + \sum_{v=r+1}^k c_v \bar{y}_v = \{y\}_k$ evident ist.

In der Extremalaufgabe Gl. (2)* und der ihr entsprechenden Determinate Gl. (3)* werden also auch nach Vertauschen der φ_v mit y_{α_v} bzw. \bar{y}_v die früheren Lösungen $\Lambda(k, t)$ gewonnen. Nun ist aber infolge der Orthogonalität der neuen Koordinatenfunktionen bei $v, \varrho \leq r$ (mit $y_{\alpha_v}^{(1)} = y_{\alpha_v}/\lambda_{\alpha_v}$):

$$\begin{aligned} a_0^{v\varrho} &= \int y_{\alpha_v} y_{\alpha_\varrho} dx = \delta_{v\varrho}, \\ a_1^{v\varrho} &= \int \frac{y_{\alpha_v}}{\lambda_{\alpha_v}} y_{\alpha_\varrho} dx = \frac{\delta_{v\varrho}}{\lambda_{\alpha_v}}, \\ a_2^{v\varrho} &= \int \frac{y_{\alpha_v} y_{\alpha_\varrho}}{\lambda_{\alpha_v} \lambda_{\alpha_\varrho}} dx = \frac{\delta_{v\varrho}}{\lambda_{\alpha_v}^2} \end{aligned}$$

und bei $v \leq r, \varrho > r$:

$$\begin{aligned} a_0^{v\varrho} &= \int y_{\alpha_v} \bar{y}_\varrho dx = c_{\alpha_v \varrho} = 0, \\ a_1^{v\varrho} &= \frac{c_{\alpha_v \varrho}}{\lambda_{\alpha_v}} = 0, \quad a_2^{v\varrho} = \frac{c_{\alpha_v \varrho}}{\lambda_{\alpha_v}^2} = 0. \end{aligned}$$

Damit lassen sich in $D_k(t, A)$ aus der 1. bis r . Zeile die Faktoren $\left(1 - \frac{t+A}{\lambda_{\alpha_v}} + \frac{tA}{\lambda_{\alpha_v}^2}\right) = \left(1 - \frac{t}{\lambda_{\alpha_v}}\right) \left(1 - \frac{A}{\lambda_{\alpha_v}}\right)$ herausheben und — da in den r ersten Zeilen außerhalb der Hauptdiagonalen nur Nullen stehen —

$$D_k(t, A) = D_{k-r}(t, A) \cdot \prod_{v=1}^r \left(1 - \frac{t}{\lambda_{\alpha_v}}\right) \left(1 - \frac{A}{\lambda_{\alpha_v}}\right)$$

schreiben. [Bei der Determinante $D_k(\infty, A)$ ist entsprechend:

$$D_k(\infty, A) = D_{k-r}(\infty, A) \cdot \prod_{v=1}^r \frac{1}{\lambda_{\alpha_v}} \left(1 - \frac{A}{\lambda_{\alpha_v}}\right).]$$

Damit ist der erste Teil von Satz III bewiesen. Die erhaltene Restdeterminante $D_{k-r}(t, A)$ hat nur noch $(k-r)$ Zeilen und Spalten; sie definiert die in Satz III genannte Funktion $\Lambda(k-r, t)$. Ihr entspricht die Variationsaufgabe Gl. (2)*, wenn nur die Funktionenklasse $\{\bar{y}\}_{k-r} = \sum_{v=r+1}^k c_v \bar{y}_v$ zugelassen ist, die keine Eigenfunktionen mehr enthält. Die abschließenden Untersuchungen über $D_{k-r}(t, A)$ werden der Bequemlichkeit halber direkt an $D_k(t, A)$ und die zugehörige Gl. (2)* anknüpfen — nur muß $\{\varphi\}_k$ jetzt als frei von Eigenfunktionen vorausgesetzt werden.

Die behauptete Symmetrie ergibt $D_k(t, A)$ unmittelbar, während man bei der Asymptotenbestimmung durch $\lim_{t \rightarrow \infty} D_k(t, A)/t^k$ auf $D_k(\infty, A)$ und damit die Geraden $A = A_\sigma(k, \infty)$, $t = A_\sigma(k, \infty)$ geführt wird. Zum Nachweise der Stetigkeitseigenschaften geht man zur Gl. (10)*. Aus Homogenitätsgründen genügt es dort, Variablensysteme mit $\sum_{(v)} p_v^2 = 1$ zu verfolgen.

Nach den Bemerkungen unter Gl. (6)* ist die Nennerform der Gl. (10)* jetzt wegen Gl. (17) [in B I] für alle t eigentlich positiv-definit und hat — nach einem

Satz von Weierstraß — als stetige Funktion der auf einen abgeschlossenen endlichen Bereich beschränkten Variablen p_v und des Parameters t , der ebenso auf einen endlichen Bereich eingeschränkt werden kann, einen Minimalwert $M > 0$. Da auch die Zählerform stetig von den gleichen endlich vielen beschränkten Variablen abhängt, ist die Stetigkeit des in Gl. (10)* betrachteten Quotienten in t und zwar gleichmäßig für alle möglichen p_v gesichert. Nach bekannten Prinzipien der Variationsrechnung [vgl. z. B. Courant-Hilbert a. a. O., insbesondere S. 364] sind damit auch die Extremwerte Λ_k überall stetige Funktionen von t . Mit Gl. (12)* überträgt sich das, von Polstellen bei $t = A_\sigma(k, \infty)$ abgesehen, auch auf die $\Lambda(k, t)$. Der Rest der Behauptungen in Satz III folgt aus Abschnitt 3 in (B II). Man beachte dabei, daß bei Abwesenheit von Eigenfunktionen in $\{\varphi\}_k$ verschiedene \leq, \geq in $<, >$ übergehen (u. a. kann $T_1(y, t) = \mu_2(y)$ ausgeschlossen werden, da sonst y eine Eigenfunktion sein müßte — vgl. die folgende Zeile). $\Lambda(k, t) = t$ [in der Gl. (23)* also entsprechend $T_1(y, t) = t$] kann unmöglich eintreten, da dann z. B. nach Abschnitt 6/C von (B II) in $\{\varphi\}_k$ Eigenfunktionen enthalten wären.

Zum Abschluß ein Zahlenbeispiel zur Schranke Gl. (7). In (B II), Abschnitt 6/C wurde die Aufgabe $y'' + (8\pi^2 x + \lambda)y = 0$, $y(0) = y(1) = 0$ behandelt. Mit den Koordinatenfunktionen $\varphi_1 = \sin \pi x$, $\varphi_2 = \sin 2\pi x$ ergeben sich nach Gl. (2)/(4)/(7) die Schranken

$$|\lambda_{S_1} - 0,580\pi^2| \leq 1,436\pi^2; \quad |\lambda_{S_1} + 3,580\pi^2| \leq 0,563\pi^2.$$

[Man vgl. hierzu Abschnitt 6/C in (B II), dort sind auch die mit dem gewöhnlichen Kryloffschen Satz und den Ansatzfunktionen φ_1 oder φ_2 erhaltenen Schranken angegeben.]

Zum Vergleich wurden schließlich im Ansatz $\{\varphi\}_2 = p_1 \varphi_1 + p_2 \varphi_2$ entsprechend zu Ritz-Galerkin die Konstanten p_1, p_2 berechnet [d. h. aus einem linearen homogenen Gleichungssystem mit der Koeffizientendeterminante $D_k(\infty, A)$] und mit den so erhaltenen Funktionen $\bar{\varphi}_1$ und $\bar{\varphi}_2$ die gewöhnliche Kryloffsche Schranke zusammengestellt:

$$|\lambda_{S_1} - 0,580\pi^2| \leq 1,452\pi^2; \quad |\lambda_{S_1} + 3,580\pi^2| \leq 0,595\pi^2.$$

Die Ergebnisse sind hier nicht wesentlich schlechter als die zuvor nach Gl. (7) erhaltenen; es läßt sich aus den Extremaleigenschaften der $\Lambda(k, t)$ nach Gl. (2)* ableiten, daß sie auf keinen Fall besser sein können. Der Beweisgang sei angedeutet: Die Ritzschen Eigenfunktionen $\bar{\varphi}_\sigma$ sind zu $A_\sigma(k, \infty)$ gehörende Extremalfunktionen. Sie ergeben daher als einzelne Koordinatenfunktion über Gl. (7) eine Kryloffsche Schranke $|\lambda_S - \Lambda_k| \leq \Lambda_k$, bei der $\Lambda_k = A_\sigma(k, \infty)$ ist, und Λ_k durch Eintragen von $\bar{\varphi}_\sigma$ und $A_\sigma(k, \infty)$ in Gl. (4) od. (5) erhalten wird. Während bei der Bestimmung der Schranke $\Lambda_{k\sigma}$ in Gl. (5) die gesamte Funktionenklasse $\{\varphi\}_k$ benutzt wird, genügt für Λ_k eine einzelne Funktion daraus; wegen der Minimaleigenschaften von $\Lambda_{k\sigma}^2$ ist damit $\Lambda_{k\sigma} \leq \Lambda_k$.

Zusammenfassend ist festzustellen, daß mit Gl. (2b), (4), (7) eine praktisch brauchbare Verallgemeinerung des Kryloffschen Einschließungssatzes erhalten wurde; die Bedeutung liegt — im Zusammenhang mit den unter 1) genannten Arbeiten betrachtet — darin, daß damit ohne Kenntnis irgendwelcher Hilfsgrößen mit mehrgliedrigen Ansätzen unter Herausstellung der $A_\sigma(k, \infty)$ konvergierende Eigenwertschranken bestimmt sind.

Daneben wurde ein wichtiger Hilfssatz angegeben, der über die hier und früher wesentlich benutzte durch $D_k(t, A) = 0$ definierte algebraische Kurve $\Lambda(k, t)$ weitgehende Auskunft erteilt.

Dresden.

N. J. Lehmann.

Ein einfaches Verfahren zur Ermittlung der gesamten Zerstreuungsfur optischer Geräte aus der meridionalen Durchrechnung auf Grund der Bildfehlertheorie dritter Ordnung.

I. Allgemeines

Die Kenntnis der gesamten Zerstreuungsfur optischer Geräte, besonders der sagittalen Ausdehnung dieser Fur ist für die Beurteilung namentlich der in ihren Leistungen hochgezüchteten optischen Geräte von großer Bedeutung. Das gilt in ganz besonderem Maße für die Okulare der Feldstecher mit scheinbaren Gesichtsfeldern von 70° an aufwärts. Die Ermittlung der gesamten Zerstreuungsfur mittels numerischer Durchrechnung von windschiefen Strahlen nach den bekannten Verfahren [1] [2] [3], nach Lebedew [4] oder nach dem von G. Pradel und mir neuerdings angegebenen Interpolationsverfahren fünfter Ordnung [5] ist trotz der in dem neueren Verfahren erzielten Fortschritte in der Verringerung des Rechenaufwands noch so umständlich, daß man alle diese Verfahren nur als letzte Kontrolle nach erfolgter Korrektur anwenden möchte. Man braucht aber während der Korrekturarbeiten einen ungefähren Anhaltspunkt für den Verlauf der Zerstreuungsfur, besonders deren sagittale Ausdehnung. Einen solchen Anhaltspunkt gewinnt man in einfacher Weise aus der Seidelschen Bildfehlertheorie dritter Ordnung. Das im folgenden näher beschriebene Verfahren hat nur die Durchrechnung von zwei Komastrahlen im Hauptschnitt und die astigmatische Rechnung zur Voraussetzung. Es ist nach erfolgter trigonometrischer Durchrechnung mit dem Rechenschieber in etwa einer Stunde durchzuführen. Beschränkt man sich nur auf die Kenntnis der sagittalen Ausdehnung der Zerstreuungsfur, dann erfordert das Verfahren nur noch einen Rechenaufwand von etwa 10 bis 15 Minuten.

II. Ableitung des Verfahrens in allgemeiner Form

Man macht für die Unschärfefehler dritter Ordnung auf der Bildseite den der Seidelschen Theorie entsprechenden allgemeinen Ansatz:

$$\Delta mer = (m_1^2 + M_1^2) m_1 S + (M_1^2 + 3m_1^2) A + m_1 Tg \quad (1a)$$

$$\Delta sag = (m_1^2 + M_1^2) M_1 S + 2m_1 M_1 A + M_1 Sg \quad (1b)$$

m_1 und M_1 bezeichnen in der herkömmlichen Weise die meridionale und sagittale Koordinate der Eintrittspupille. Die übrigen Größen Δmer , Δsag , S , A , Tg , Sg sind als Abkürzung eingeführt und hängen mit den entsprechenden Größen der Seidelschen Theorien folgendermaßen zusammen:

a) für unendlich fernes Objekt, Bild im Endlichen

Δmer , Δsag : Koordinaten der Abweichung des Durchstoßpunktes des Strahles durch die Gaußsche Bildebene vom Gaußschen Bildpunkt.

$$S = -\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{n_k'} f_k' \Sigma I \quad (2)$$

$$A = +\frac{1}{2} \cdot \frac{n_1}{n_k'} f_k' \text{tg } w_1 \Sigma II \quad (2b)$$

$$Tg = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n_1^2}{n_k'} f_k' \text{tg}^2 w_1 \Sigma III \quad (2c)$$

$$Sg = -\frac{1}{2} \cdot \frac{n_1^2}{n_k'} f_k' \text{tg}^2 w_1 \Sigma VI \quad (2d)$$

b) für teleskopisches System

Δmer : Winkelabweichung des in den Hauptschnitt projizierten austretenden Strahles gegen den Hauptstrahl.

Δsag : Winkelabweichung des in die Sagittalebene projizierten austretenden Strahles gegen die Achse.

$$S = -\frac{1}{2n_1} \Gamma \Sigma I \quad (3a)$$

$$A = +\frac{1}{2} \Gamma \text{tg } w_1 \Sigma II \quad (3b)$$

$$Tg = -\frac{1}{2} \Gamma n_1 \text{tg}^2 w_1 \Sigma III \quad (3c)$$

$$Sg = -\frac{1}{2} \Gamma n_1 \text{tg}^2 w_1 \Sigma IV \quad (3d)$$

c) für endliches Objekt und endliches Bild

Δmer , Δsag : Bildhöhenabweichung wie unter a)

$$S = +\frac{1}{2} \frac{\beta s_1^4}{n_1 (z_1 - s_1)^3} \Sigma I \quad (4a)$$

$$A = -\frac{1}{2} \frac{\beta L_1 s_1^2}{(z_1 - s_1)^2} \Sigma II \quad (4b)$$

$$Tg = -\frac{1}{2} \frac{n_1 \beta L_1^2}{(z_1 - s_1)} \Sigma III \quad (4c)$$

$$Sg = -\frac{1}{2} \frac{n_1^2 L_1^2}{(z_1 - s_1)} \Sigma VI \quad (4d)$$

In den Gleichungen (2) bis (4) bedeutet:

Γ = Fernrohrvergrößerung,

β = Lateralvergrößerung,

L_1 = Objekthöhe,

s_1 = Eingangsschnittweite des Aperturstrahls,

z_1 = Eingangsschnittweite des Hauptstrahls,

f_k = Systembrennweite nach der k -ten Fläche,

n_k bzw. n_k' = Brechungsindex vor bzw. hinter der k -ten Fläche.

Im übrigen gilt für die Summen die Berecsche Nomenklatur [6].

Für die weitere Ableitung erscheint es nun zweckmäßig, die Gleichung (1) für einen Radius p' der Eintrittspupille zu normieren. Man setzt dann

$$m_1 = \eta p \quad (6a)$$

$$M_1 = \xi p \quad (6b)$$

η und ξ stellen dimensionslose Koeffizienten dar. (1) läßt sich dann in der Form schreiben:

$$\Delta mer = (\eta^2 + \xi^2) \eta p^3 S + (3\eta^2 + \xi^2) p^2 A + \eta p Tg \quad (7a)$$

$$\Delta sag = (\eta^2 + \xi^2) \xi p^3 S + 2\eta \xi p^2 A + \xi p Sg \quad (7b)$$

Die Größen $p Tg$ und $p Sg$, die tangentiale und sagittale Zerstreuungshnie, lassen sich aus den astigmatischen Durchrechnung bestimmen (Einzelheiten hierüber im Abschnitt IV). Es sind also nur noch die Unbekannten S und A zu ermitteln. Dazu sind zwei Komadurchrechnungen erforderlich. Die Koordinaten der Eintrittspupille dieser Komastrahlen seien:

für den ersten Strahl: $\eta = \mu_1$; $\xi = 0$,

für den zweiten Strahl: $\eta = \mu_2$; $\xi = 0$.

Die dazugehörigen Bildfehler betragen dann:

für den ersten Strahl: $\Delta mer = k_1$; $\Delta sag = 0$,

für den zweiten Strahl: $\Delta mer = k_2$; $\Delta sag = 0$.

Damit erhält man aus (7a) das Gleichungssystem:

$$\mu_1^3 p^3 S + 3\mu_1^2 p^2 A = k_1 - \mu_1 p Tg \quad (8a)$$

$$\mu_2^3 p^3 S + 3\mu_2^2 p^2 A = k_2 - \mu_2 p Tg \quad (8b)$$

dessen Lösung lautet:

$$S = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 k_2 - \mu_1 p Tg \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right) \right\} \quad (9a)$$

$$A = \frac{1}{3p^2} \cdot \frac{1}{\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 k_2 - \mu_1 p Tg \left[1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2\right] \right\} \quad (9b)$$

dieses in (7) eingesetzt, liefert die Interpolationsgleichung in der allgemeinsten Form

$$\Delta mer = \frac{(\mu^2 + \xi^2) \eta}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 k_2 \right\} + \frac{3\eta^2 + \xi^2}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^3 k_2 \right\} + p Tg \left\{ \eta - (\eta^2 + \xi^2) \frac{\eta}{\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} - (3\eta^2 + \xi^2) \frac{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}{3\mu_1} \right\} \quad (10a).$$

$$\Delta sag = \frac{(\eta^2 + \xi^2) \xi}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 k_2 \right\} + \frac{2\eta \xi}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ k_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 k_2 \right\} + p \left\{ \xi Sg - \left[(\eta^2 + \xi^2) \frac{\xi}{\mu^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} - \frac{1 + \frac{\mu_1}{\mu_2}}{3\mu_1} \right] Tg \right\} \quad (10b).$$

Es empfiehlt sich, in den Gleichungen (9) und (10) an Stelle der Gesamtabweichung k_1 und k_2 , die um die tangentielle Zerstreuungslinie reduzierte Komaabweichung \bar{k}_1 und \bar{k}_2 einzuführen. Man setzt also

$$\bar{k}_1 = k_1 - \mu_1 p Tg \quad (11a),$$

$$\bar{k}_2 = k_2 - \mu_2 p Tg \quad (11b).$$

Für die Korrektur haben diese neuen Größen dieselbe Bedeutung wie die auf den tangentialen Bildpunkt bezogene Koma-Längsabweichung. Diese neuen Größen enthalten nur noch den Öffnungs- und Asymmetriefehler.

In dieser Schreibweise erhält man für die Gleichungen (9) und (10)

$$S = \frac{1}{p^3} \cdot \frac{1}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \bar{k}_2 \right\} \quad (12a).$$

$$A = \frac{1}{3p^2} \cdot \frac{1}{\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 \bar{k}_2 \right\} \quad (12b).$$

$$\Delta mer = \frac{(\eta^2 + \xi^2) \eta}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \bar{k}_2 \right\} + \frac{3\eta^2 + \xi^2}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 \bar{k}_2 \right\} + \eta p Tg \quad (13a).$$

$$\Delta sag = \frac{(\eta^2 + \xi^2) \xi}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^2 \bar{k}_2 \right\} + \frac{2\eta \xi}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 \bar{k}_2 \right\} + \xi p Sg \quad (13b).$$

III. Herleitung von Sonderfällen für die Rechenpraxis

Die Gleichungen (13) haben in der allgemeinen Form für die Praxis wenig Bedeutung, da die Zerstreuungsfigur fast immer nur für eine kreisförmige Pupille von Interesse ist. (Der Einfluß der Randvignettierung läßt sich leicht abschätzen!) Außerdem kann man übereinkommen für μ_1 und μ_2 besonders Werte allgemein festzulegen. Es sollen daher die Formeln für folgende Sonderfälle angeschrieben werden:

- a) kreisförmige Pupille μ_1, μ_2 beliebig,
- b) kreisförmige Pupille, die Komastrahlen gehen durch deren Rand,
- c) kreisförmige Pupille, die Komastrahlen gehen ebenfalls durch deren Rand, die Zerstreuungsfigur soll jedoch für einen anderen Pupillenhalmmesser berechnet werden, als den für den die trigonometrische Rechnung vorliegt.

a) Kreisförmige Pupille, μ_1, μ_2 beliebig.

Man setzt

$$\eta = \sin \chi \quad (14a),$$

$$\xi = \cos \chi \quad (14b).$$

χ Azimut der Pupille, gegen die sagittale Achse gezählt. Damit wird (13)

$$\Delta mer = \frac{\sin \chi}{\mu_1^3 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \bar{k}_2 \right\} + \frac{1 + 2 \sin^2 \chi}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 \bar{k}_2 \right\} + p Tg \sin \chi \quad (14a).$$

$$\Delta sag = \frac{\cos \chi}{\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_2}{\mu_1}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_2}{\mu_1}\right)^2 \bar{k}_2 \right\} + \frac{\sin 2\chi}{3\mu_1^2 \left(1 - \frac{\mu_1}{\mu_2}\right)} \left\{ \bar{k}_1 - \left(\frac{\mu_1}{\mu_2}\right)^3 \bar{k}_2 \right\} + p Sg \cos \chi \quad (14b).$$

b) Kreisförmige Pupille, die Komastrahlen gehen durch deren Rand.

Mit $\mu_1 = +1, \mu_2 = -1$ wird aus (14):

$$\Delta mer = \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} \sin \chi + \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} (1 + 2 \sin^2 \chi) + p Tg \sin \chi \quad (15a).$$

$$\Delta sag = \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} \cos \chi + \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} \sin 2\chi + p Sg \cos \chi \quad (15b).$$

Insbesondere gilt für den Sagittalstrahl $\chi = 0$:

$$(\Delta mer)_{\chi=0} = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} \quad (16a),$$

$$(\Delta sag)_{\chi=0} = \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} + p Sg \quad (16b).$$

Die Seidelschen Koeffizienten S und A erhalten dann die Form

$$S = \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2p^3} \quad (17a),$$

$$A = \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6p^2} \quad (17b).$$

c) Kreisförmige Pupille, die Komastrahlen gehen durch deren Rand, die Zerstreuungsfigur soll für die Pupille q p ermittelt werden:

Man setzt in (13):

$$\eta = q \sin \chi \quad (18a),$$

$$\xi = q \cos \chi \quad (18b)$$

ferner $\mu_1 = +1$, $\mu_2 = -1$.

Man erhält dann:

$$\Delta mer = q^3 \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} \sin \chi + q^2 \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} (1 + 2 \sin^2 \chi) + p q Tg \sin \chi \quad (19a),$$

$$\Delta sag = q^3 \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} \cos \chi + q^2 \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} \sin 2\chi + p q Sg \cos \chi \quad (19b),$$

daraus die Abweichung des Sagittalstrahls

$$(\Delta mer)_{\chi=0} = q^2 \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} \quad (20a),$$

$$(\Delta sag)_{\chi=0} = q^3 \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} + p q Sg \quad (20b),$$

daraus die Abweichung der Meridianstrahlen

$$(\Delta mer)_{\chi=+90^\circ} = q^3 \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} + q^2 \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} + p q Tg \quad (21a),$$

$$(\Delta mer)_{\chi=+90^\circ} = -q^3 \frac{\bar{k}_1 - \bar{k}_2}{2} + q^2 \frac{\bar{k}_1 + \bar{k}_2}{6} - p q Tg \quad (21b).$$

Mit den Formeln (15) bis (21) lassen sich alle praktisch interessierenden Fälle erledigen.

IV. Rechentechnische Ergänzungen für den Gebrauch der Interpolationsformeln.

a) Zur Berechnung von $p Tg$ und $p Sg$.

1. Endliche bildseitige Schnittweite.

Der Halbmesser der Austrittspupille sei p' , die auf die Achse projizierten astigmatischen Längsaberrationen bezogen auf die Gaußsche Bildebene werden mit T_{proj} bzw. S_{proj} bezeichnet, der Abstand der Austrittspupille vom letzten Flächenscheitel sei z' , die letzte Schnittweite s' , dann erhält man für die tangential- und sagittale Zerstreuungslinie auf Grund einer einfachen geometrischen Proportion:

$$p Tg = p' \frac{T_{proj}}{T_{proj} - (z' - s')} \quad (22a),$$

$$p Sg = p' \frac{S_{proj}}{S_{proj} - (z' - s')} \quad (22b).$$

2. Unendliche bildseitige Schnittweite.

Die astigmatischen Korrekturen seien als Kehrwerte der tangentialen und sagittalen Schnittweiten in Dioptrien — Dtg bzw. Dsg — gegeben. Dann ergibt sich für die augenseitigen, der astigmatischen Rechnung entsprechenden Zerstreuungswinkel im Bogenmaß:

$$p Tg = \Delta u'_{tg} \approx \frac{p' Dtg}{1000} \quad (23a),$$

$$p Sg = \Delta u'_{sg} \approx \frac{p' Dsg}{1000} \quad (23b).$$

Für astronomische Fernrohre ist hierbei zu beachten, daß zu positivem p negatives p' gehört.

b) Der zahlenmäßige Wert von p' .

Bei großen Hauptstrahlneigungen und großen Öffnungsverhältnissen weichen die Durchstoßpunkte der Randstrahlen durch die Ebene, in der der Hauptstrahl die Achse schneidet, oft erheblich von den Werten der Gaußschen Austrittspupille ab. Insbesondere ist die Pupille stark verzerrt. Verhältnisse von 1,3 : 1 für die Größe der tangentialen zur sagittalen Pupillenausdehnung sind keine Seltenheit. Erfahrungsgemäß verfährt man am besten so, daß man die meridionalen Durchstoßhöhen durch die Ebene des augenseitigen Kreuzungspunktes des Bildes bildet, aus den so erhaltenen Werten des oberen und unteren Strahles das Mittel nimmt und vom Intervall zwischen Gaußscher Pupille und dem oben gebildeten Mittel $\frac{1}{4}$ zur Gaußschen Pupille zuschlägt, und mit dem so gebildeten p' in die Formel geht. Man kann natürlich auch aus der Sagittalrechnung im Hauptschnitt die sagittale Pupillenvergrößerung exakt ermitteln. Im Rahmen der hier zu erwartenden Genauigkeit kann man jedoch auf diese exakte Bestimmung verzichten.

Schrifttum.

- [1] F. Staebble: Centralzeitung f. Opt. u. Mech. 45 (1924), S. 149.
- [2] A. König u. M. v. Rohr in M. v. Rohr: „Die Theorie der optischen Instrumente“, Bd. I Berlin 1904, Springer. S. 52—76.
- [3] A. König: „Geometrische Optik“ Bd. XX, 2 des Handb. d. Exp. Physik v. Wien-Harms. Leipzig 1929, S. 40—44.
- [4] I. W. Lebedew: Berechnungsformeln für den Durchgang schräger Strahlen durch ein beliebiges optisches System ohne Anwendung von Tabellen. Opt. mech. Industrie (Leningrad, russisch) (1938), Nr. 7, S. 1—6.
- [5] H. Köhler und G. Pradel: Eine neue Interpolationsmethode zur Ermittlung der gesamten Zerstreuungsfigur optischer Instrumente mit unendlich fernem Bild. (Diese Zeitschrift im Druck.)
- [6] M. Bereck: „Grundlagen der praktischen Optik“. Berlin-Leipzig 1930, S. 41 ff.

Jena.

Horst Köhler.

Optik Carl Zeiß Jena VEB.

BUCHBESPRECHUNGEN

D. Hilbert und W. Ackermann, Grundzüge der theoretischen Logik, (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. XXVII). 3. Aufl., VIII + 155 S. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949. Springer-Verlag. Preis: brosch. 16,50 DM, geb. 19,80 DM.

Von den Grundlagen der modernen Logik, die vornehmlich von Lotze und Frege ihren Ausgang nahm und am treffendsten als funktionstheoretische Logik zu kennzeichnen ist, machen wir tatsächlich fortgesetzt Gebrauch. Durch sie ist der Bereich des Mathematischen oder auch der Anwendungsbereich der Mathematik prinzipiell derart erweitert worden, daß sie nicht mehr nur Einzelwissenschaft ist. Durch systematische Anwendung des in der Mathematik geübten Formalisierens auf die Logik entstand die Hilbertsche Logistik, deren Symbolismus sich durch Eleganz und Einfachheit auszeichnet. In diese Theorie und die Förderung, die sie durch jüngere Arbeiten erfuhr, führt das genannte Werk in geradezu muster-gültiger Weise ein. Es ist den Verfassern gelungen, den heute noch abseits liegenden abstrakten Stoff in meisterhaft plastischem Aufbau klar und faßlich darzustellen. Vor allem für den an der Axiomatik interessierten Mathematiker ist die Lektüre ein Genuß.

Dresden,

M. Draeger.

Dr. phil. habil. Hans Gebelein, Zahl und Wirklichkeit. Grundzüge einer mathematischen Statistik. (2. Aufl.) XII + 430 S. mit 52 Abb. 6 Zahlentafeln und 3 Kurvenblättern. Heidelberg 1949. Quelle u. Meyer. Preis 12,— DM.

Die vorliegende zweite Auflage des vielgebrauchten Werkes von Gebelein ist ein im wesentlichen unveränderter Abdruck, der unter Benutzung des Satzes für die erste Auflage hergestellt ist. Das Buch behandelt in fünf Kapiteln zunächst die beschreibende Statistik und die statistischen Zeitreihen, dann die theoretische Statistik und zwar zunächst die homograde, dann die heterograde Theorie und schließlich die Korrelationstheorie. Charakteristisch für die auf der Kombinatorik aufgebaute Darstellung ist u. a., daß alle grundsätzlichen Schlüsse für ein endliches Kollektiv durchgeführt werden, so daß die an der fertigen Formel durchgeführten Grenzübergänge nur eine nachträgliche Vereinfachung geben, ferner die systematische Behandlung der drei statistischen Schlüsse und die umfassende Verwendung von Orthogonalpolynomen. Als neues Korrelationsmaß wird in dem Abschnitt über Variationsprobleme der Korrelation die Maximalkorrelation eingeführt. In dieser Zeitschrift wurde sie vom Verf. zuerst für geometrische Verteilungen dargestellt (Bd. 21 (1941) S. 364—379. Man vergleiche dazu den Aufsatz von Friede und Münzner, diese Zeitschrift Bd. 28 (1948) S. 158 bis 160). Die Gebeleinsche Statistik hat ihre Brauchbarkeit durch den schnellen Absatz der ersten Auflage bewiesen. Für eine Neuauflage möchte man außer den vom Verfasser ins Auge gefaßten Änderungen wünschen, daß die in den letzten zehn Jahren hauptsächlich in den angelsächsischen Ländern erarbeiteten Methoden stärker berücksichtigt würden.

Dresden,

Willers.

Dr. Fr. Reutter (apl. Prof. a. d. Techn. Hochschule Karlsruhe), Darstellende Geometrie. Bd. II. Kotierte Projektion, Orthogonale Axonometrie. Zentralperspektive. 216 S. mit 210 Abb. Karlsruhe 1949. Verlag H. Braun. Preis geb. 12,50 DM.

Dieser zweite Band ist, wie der erste, aus Vorlesungen an der Technischen Hochschule Karlsruhe entstanden, also in ständiger Fühlung mit den Bedürfnissen der Studenten, insbesondere der Ingenieurstudenten. In

allen Teilen bringt es zunächst das notwendige geometrische Rüstzeug (Grundbegriffe, Grundaufgaben). Verf. versteht es dabei, das Wesentliche herauszuarbeiten und klar darzustellen. Die Figuren sind mit großem Geschick ausgewählt, sehr anschaulich, geradezu plastisch gezeichnet und vermitteln das Darzustellende unmittelbar, ohne vieler Beschreibung und Beschriftung zu bedürfen. Das Hauptgewicht wird auf sorgfältig ausgewählte Anwendungsbeispiele gelegt. Für die kotierte Projektion gibt er nach einigen Dachkonstruktionen eine Reihe von Geländeaufgaben, in denen alle Fragen und Methoden, die in der Praxis vorkommen, ihre Stelle finden. Für die Axonometrie gibt er eine Reihe sehr lehrreicher Beispiele von Vielflächen und Durchdringungen krummer Flächen sowie von Schattenkonstruktionen.

Weit über die Hälfte des Buches ist der Zentralperspektive gewidmet. Auch hier entwickelt Verf. zunächst sehr gründlich die mathematischen Grundlagen sowie den Begriff der perspektiven Verwandtschaft, und benutzt sie dann sofort wieder zur Konstruktion der perspektiven Bilder des Kreises und der Kegelschnitte. Weiter gibt er dann die Verfahren der freien und gebundenen Perspektive an, wie sie sich insbesondere aus der Praxis des Architekten entwickelt haben. Nach einem Kapitel über Perspektive von krummen Linien und Flächen geht er schließlich auf Spiegelung und Schatten auf ebene und krumme Auffangflächen ein. Einige Beispiele sind so gewählt, daß sich an ihnen die verschiedensten Methoden erläutern lassen, so daß diese Figuren in immer anderen Aspekten öfters wiederkehren. In einem Anhang zeigt er das Bild eines bestimmten Hauses in 12 verschiedenen Projektionen.

Das Buch wahrt gegenüber den anderen Büchern über darstellende Geometrie durchaus sein eigenes Gesicht. Ich selbst ziehe es gern in meinen Vorlesungen zu Rate, vor allem, was die Anlage der Figuren betrifft. Ich empfehle es gern meinen Hörern wegen seiner gediegenen und dabei so anschaulichen Darstellungsweise. Auch zum Selbststudium scheint mir das Buch auf Grund seiner Stoffauswahl und der ausführlichen Darstellung des Gebotenen sehr geeignet.

Dresden,

Ott-Heinrich Keller.

Otto Toeplitz, Die Entwicklung der Infinitesimalrechnung. Eine Einleitung in die Infinitesimalrechnung nach der genetischen Methode. Erster Band. Aus dem Nachlaß herausgegeben von Dr. Gottfried Köthe (Prof. a. d. Univ. Mainz) (Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen mit besonderer Berücksichtigung der Anwendungsgebiete, Bd. LVI). IX + 181 S. mit 148 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg. 1949. Springer-Verlag. Preis: brosch. 19,60 DM., geb. 22,60 DM.

Das Manuskript dieses ersten Bandes der Vorlesungen von Toeplitz fand sich im Nachlaß des 1940 in Jerusalem verstorbenen Verfassers. Dem Herausgeber muß man dankbar sein, daß er diese wertvolle Arbeit der Öffentlichkeit zugänglich gemacht hat. Die Aufzeichnungen waren so, daß sie fast unverändert gedruckt werden konnten. Die Vorlesung gibt eine Einführung in die Infinitesimalrechnung, die den Studierenden die Entstehung der Begriffe miterleben lassen will. Dabei handelt es sich aber nicht um eine Geschichte der Mathematik, sondern nur um die allmähliche Entwicklung „der Probleme, Tatsachen und Beweise, um die entscheidenden Wendepunkte dieser Genesis“. Verf. bezeichnet diese Methode als genetisch. Er sagt: „Man kann die einzelnen oft explosiv vollzogenen Entwicklungen in der Regel als einen Fingerzeig für eine methodische Fortentwicklung nehmen. Unerschöpflich kann man so aus der Historie für den didaktischen Aufbau lernen.“ Durch die Ausführung dieses Gedankens ist es gelungen, in den drei

Kapiteln: Das Wesen des unendlichen Prozesses, Das bestimmte Integral und Differential- und Integralrechnung, anschließend an die historische Entwicklung, beginnend mit der griechischen Mathematik das Wesen der Grenzübergänge herauszuarbeiten und darauf aufbauend systematisch die einzelnen Arten, wie Integrieren, Differenzieren, Summieren unendlicher Reihen usw. zu entwickeln. Es entsteht so ein oft geradezu spannendes Bild dieser Entwicklung, das durchgehend den Studierenden fesseln wird und ihn

ohne Schwierigkeiten zu den Begriffen der modernen Mathematik führt. Übungsaufgaben geben die nötige Ergänzung und Abrundung.

Leider liegt von dem geplanten zweiten Band dieser Vorlesung nur wenig Material vor, das wahrscheinlich nicht ausreicht, um ihn in der Art des vorliegenden herauszubringen. Wenigstens diesen ersten Band möchte man in den Händen recht vieler Studierenden und Lehrer sehen.

Dresden.

Willers.

Die besprochenen und angezeigten Bücher sind durch den Buchhandel zu beziehen.

EINGEGANGENE BÜCHER

Bei der Schriftleitung sind folgende Bücher eingegangen (ausführliche Besprechung bleibt vorbehalten).

Dr.-Ing. Fritz Leonhardt und Dipl.-Ing. Wolfhart André, Die vereinfachte Trägerrostberechnung. 256 S. mit 247 Abb. und Tabellen. Stuttgart 1950. Julius Hoffmann Verlag. Preis geb. 32,— DM.

Claus Müller, Zur mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. (Abhandlungen der Deutschen Akademie der Wissenschaften zu Berlin. Mathem.-naturwissenschaftl. Klasse, Jahrg. 1945/46, Nr. 3.) 56 S. mit 5 Abb. Berlin 1950. Akademie-Verlag. Preis 7,— DM.

Dr. R. Becker (o. Prof. a. d. Univ. Göttingen), Vorstufe zur theoretischen Physik. VII + 172 S. mit 94 Abb. Berlin-Göttingen-Heidelberg 1950. Springer-Verlag. Preis 7,50 DM.

L. Heffter (Prof. a. d. Univ. Freiburg/Br.), Grundlagen und analytischer Aufbau der Projektiven, Euklidischen, Nichteuklidischen Geometrie. Zweite, verbesserte Aufl. 192 S. mit 66 Abb. Leipzig 1950. B. G. Teubners Verlagsgesellschaft. Preis geb. 12,60 DM.

NACHRICHTEN

Prof. Dr. Karl Federhofer 65 Jahre alt

Am 5. Juli 1950 begeht Prof. Dr. Karl Federhofer seinen 65. Geburtstag. Er wurde als Sohn eines Lokomotivführers in Knittelfeld/Obersteiermark geboren und studierte an der Techn. Hochschule zu Graz 1903—1908 Bauingenieurwesen. Nach der mit Auszeichnung bestandenen 2. Staatsprüfung war er bei der Staatsbahndirektion Linz und im steiermärkischen Staatsbaudienst bis zu seiner 1920 erfolgten Ernennung zum o. Professor der Mechanik an der Technischen Hochschule Brunn tätig. Er promovierte 1909 in Graz und habilitierte sich 1913 an der montanistischen Hochschule in Leoben. Federhofer war Schüler von Forehheimer und von Wittenbauer, als dessen Nachfolger man ihn 1923 von Brunn nach Graz berief.

Seine schon 1908 beginnende wissenschaftliche Tätigkeit erstreckt sich auf alle Teilgebiete der technischen Mechanik, vor allen Dingen aber auf graphische Kinematik und Dynamik, sowie Stabilitäts- und Eigenschwingungsprobleme elastischer Systeme. Die Ergebnisse seiner Forschung legte er in mehr als 100 Abhandlungen nieder, die zum Teil auch in der Z. angew. Math. Mech. erschienen. Insbesondere lag ihm als Schüler Wittenbauers der weitere Ausbau des Lehrgebäudes der graphischen Dynamik am Herzen. Ihr ist sein Buch „Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems“ Wien 1928 und der zusammenfassende Aufsatz „Graphische Kinematik und Kinetostatik“ in den Ergebnissen der Mathematik und ihrer Grenzgebiete, Berlin 1932, gewidmet.

Seine 30jährige Lehrerbefahrung faßte er 1949 in dem Werk „Prüfungs- und Übungsaufgaben aus der Mechanik des Punktes und starren Körpers“ zusammen. Ferner erschien in diesem Jahr das sich im wesentlichen auf eigene Arbeiten stützende Werk „Dynamik des Bogenstrahlers und Kreisringes“.

Seine hervorragenden Leistungen wurden durch eine Reihe von Berufungen, die er aber ablehnte, und durch seine Ernennung zum o. Mitglied der Akademie der Wissenschaften in Wien anerkannt.

Möge Federhofer noch manches Jahr erfolgreichen wissenschaftlichen Schaffens beschieden sein.

Willers.

Prof. Dr. Constantin Weber 65 Jahre alt.

Am 14. August dieses Jahres vollendet Dr.-Ing. Constantin Weber das fünfundsiebzehnte Lebens-

jahr. Er wurde 1885 als Sohn eines Arztes in Bärenwalde in Sachsen geboren, verlebte vom zehnten Jahre an seine Jugend in Rußland, größtenteils in Riga, wo sich sein Vater als Lehrer für Sprachen niedergelassen hatte. Dort besuchte er die Real- und die Polytechnische Schule; anschließend studierte er 1906—1911 in Braunschweig Maschinenbau. Nach dem Diplomexamen war er bei verschiedenen Firmen vor allem im Kranbau als Konstrukteur tätig, ging 1926 als Lehrer an die Maschinenbauschule Dortmund und wurde 1928 als o. Professor für Festigkeitslehre an die T. H. Dresden berufen. Seit November 1945 ist er Leiter der theoretischen Abteilung des Institutes für Maschinenelemente der T. H. Braunschweig und hat einen Lehrauftrag für Sondergebiete der Mechanik. Weber hat am ersten Weltkrieg teilgenommen und ist schwer verwundet worden.

Weber stand von Anfang an der Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik nahe und hat den größten Teil seiner Arbeiten hier veröffentlicht. In den ersten Jahren sandte er vielfach Berichtigungen und weiterführende Bemerkungen zu Arbeiten anderer ein [2, 3, 7, 12, 13]¹⁾. Aber schon der zweite Band bringt einen Aufsatz über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in gezogenen Blechen [6], eine Frage, auf die er später zurückkommt [27] und die er nochmals 1942 in einer Dissertation [Hütter, Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 322—335] bearbeiten läßt. Die weiteren Jahrgänge bringen dann den ersten und dritten Teil seiner Dissertation [9, 11], mit der er 1924 in Braunschweig promovierte; sie beschäftigt sich mit der Biegung und dem Schub im geraden Balken und der Übertragung des Drehmomentes im Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. Dabei fand er den wichtigen Querkraftmittelpunkt und seine Übereinstimmung mit dem Drehpunkt bei Torsion. Auf die Frage der Drehfestigkeit hatte ihn schon die Untersuchung über die Normalspannungen in Aussteifungsringen von Hochbehältern geführt, ein Problem, das er weiter in einem VDI-Forschungsheft [3] und in einem Beitrag zur Festschrift für August Föppl [8] behandelte. Auf Grund dieser Arbeiten wurde Weber nach Dresden berufen.

Eine andere Frage, die ihn seit etwa 1930 beschäftigte, ist die der Eingrenzungen von Verschie-

¹⁾ Bekige Klammern beziehen sich auf das Schrifttumsverzeichnis am Ende des Artikels.

bungen und Spannungen mit Hilfe der beiden Minimalansätze der Elastizitätstheorie [15, 22, 23, 31, 32]. Eine schöne Anwendung dieser Untersuchungen auf die Biegung gekrümmter, dünnwandiger Rohre gibt die von ihm angeregte Dissertation von Carl [Z. angew. Math. Mech. 23 (1943) S. 331–345]. Noch zahlreiche weitere Arbeiten aus dem Gebiet der Festigkeitslehre, z. B. über die Theorie der Härte [16, 35], die der Platten und Scheiben [21, 23, 26, 30] und über andere Fragen [24, 33, 37, 38] sind in unserer Zeitschrift erschienen. Wegen ihrer Anschaulichkeit gibt Weber darin der Anwendung der konformen Abbildungen den Vorzug vor der Benutzung angepaßter Koordinaten. Aus dem gleichen Grunde arbeitet er gern mit der Aufsuchung von Singularitäten. Alle seine Arbeiten zeichnen sich durch systematischen Aufbau aus. Sie gehen meist von der Anschauung aus und suchen rechnerisch gewonnene Ergebnisse wieder zu veranschaulichen. Erfahrung und Sicherheit der Anschauung machen Weber zu einem Meister seines Fachgebietes, aus ihm liegen drei zusammenfassende Darstellungen von Weber vor. Außer einem frühen Werk: „Die Lehre von der Drehfestigkeit“ [3] erschienen neuerdings zwei weitere einführende Bändchen: „Festigkeitslehre“ [39] und „Schwingungen im Maschinenbau“ [40]. Zur Zeit arbeitet er an einem groß angelegten Werk „Elastizitätslehre“.

Eine große Zahl von Arbeiten gehen aber weit über sein Fachgebiet hinaus. Er behandelt Fragen der Hydrodynamik [14, 19, 20], insbesondere auch der hydrodynamischen Theorie der Zapfenreibung [34, 41] und der Mathematik, Probleme, in denen die Anschauung eine Rolle spielt [17, 18, 28, 29]; auch physikalischen Fragen bringt er großes Interesse entgegen.

Neben dem Forscher darf der ausgezeichnete Lehrer und der „Studentenvater“ nicht vergessen werden. Einen großen Teil seiner Zeit widmete Weber von Anfang an der Beratung und Betreuung der Studierenden. So war es selbstverständlich, daß er im letzten Kriege die Aufrechterhaltung der Verbindung der Hochschule mit den im Felde stehenden Studierenden und den Kriegsgefangenen übernahm. Rund 5000 junger Leute hat er so betreut. Wo er kann, sucht er auch heute junge, interessierte Hörer um sich zu sammeln, um sie zu fördern und zum Denken anzuregen. Zahlreiche Dissertationen sind so durch ihn veranlaßt, die zum großen Teil in dieser Zeitschrift erschienen sind.

Möge Weber seine Arbeitsfreude und seine geistige Spannkraft noch lange erhalten bleiben.

Schrifttumsverzeichnis

- [1] Berechnung der Normalspannungen in den Aussteifungsringen von Hochbehältern auf Einzelstützen. Z. VDI 63 (1919), S. 978–983.
- [2] Berechnung dünner Platten mit verschwindender Biegesteifigkeit (Bemerkung zu einem Aufsatz von Hencky). Z. angew. Math. Mech. 1 (1921), S. 423.
- [3] Die Lehre von der Drehfestigkeit. VDI-Forsch.-Heft 249. Berlin 1922.
- [4] Drehfestigkeit von Stäben. Z. VDI 66 (1922), S. 764–769.
- [5] Über die Spannungserhöhung durch kreisrunde Löcher in einem gezogenen Blech. (Bemerkung zu einem Aufsatz von Pöschl.) Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 185–187.
- [6] Spannungsverteilung in Blechen mit mehreren kreisrunden Löchern. Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 267–273.
- [7] Bisherige Lösungen des Torsionsproblems. Ergänzungen zu einem zusammenfassenden Bericht von Pöschl.) Z. angew. Math. Mech. 2 (1922), S. 299–302.
- [8] Der Verdrehungswinkel von Walzeisensträgern. Beiträge zur technischen Mechanik und technischen Physik. (August Föppl zum 70. Geburtstag.) Berlin 1924.
- [9] Biegung und Schub in geraden Balken. (Dissertation, erster Abschnitt.) Z. angew. Math. Mech. 4 (1924), S. 334–348.
- [10] Achsensymmetrische Deformation von Um-drehungskörpern. (Bemerkung zu einem Aufsatz von Timpe.) Z. angew. Math. Mech. 5 (1925), S. 466–468.
- [11] Übertragung des Drehmomentes in Balken mit doppelflanschigem Querschnitt. (Dissertation, dritter Abschnitt.) Z. angew. Math. Mech. 6 (1926), S. 85–97.
- [12] Beiträge zur Lösung des ebenen Problems eines elastischen Körpers. (Bemerkungen zu einer Arbeit von Riedel.) Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 159–160.
- [13] Zur Theorie der zylindrischen Schalen und Bogen-träger. (Bemerkung zur Zuschrift Meißner zur Arbeit Pöschl.) Z. angew. Math. Mech. 8 (1928), S. 160.
- [14] Zum Zerfall eines Flüssigkeitsstrahles. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 136–154.
- [15] Bestimmung des Steifigkeitswertes von Körpern durch zwei Näherungsverfahren. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 244–245.
- [16] Beitrag zur Berührung gewölbter Oberflächen beim ebenen Formänderungszustand. Z. angew. Math. Mech. 11 (1931), S. 426 (Vortrag Bad Elster) und Z. angew. Math. Mech. 13 (1933), S. 11–16.
- [17] Lösung einer topologischen Aufgabe. Jahresber. Dtsch. Math.-Ver. 42 (1933), II, S. 3–6.
- [18] Die beiden Dodekaederräume (mit H. Seiffert). Math. Z. 37 (1933), S. 237–253.
- [19] Theoretischer Ansatz für die Schulerschen Umschlagwellen. (Vortrag Stuttgart.) Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), S. 379–380.
- [20] Kanalwellen geringer Wellenhöhe. (Vortrag Stuttgart.) Z. angew. Math. Mech. 15 (1935), S. 380.
- [21] Streifen mit Einzellast. (Vortrag Dresden.) Z. angew. Math. Mech. 16 (1936), S. 372–375.
- [22] Veranschaulichung und Anwendung der Minimal-sätze der Elastizitätstheorie. (Vortrag Göttingen.) Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 375–379.
- [23] Über einige ebene Randwertprobleme der Elastizitätstheorie. (Bemerkung zu einem Aufsatz von Weinell.) Z. angew. Math. Mech. 18 (1938), S. 150.
- [24] Zur Umwandlung von rotationssymmetrischen Problemen in zweidimensionale und umgekehrt. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 117–118.
- [25] Über die Minimalansätze der Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 32–42.
- [26] Halbebene mit Kreisbogenkerbe. Z. angew. Math. Mech. 20 (1940), S. 262–270; Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 230–232.
- [27] Zur Spannungserhöhung bei gelochten gezogenen Streifen. Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 252.
- [28] Potenzreihenzerlegung von $\operatorname{tg} x$ und $\operatorname{ctg} x$. Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 252–253.
- [29] Über genäherte Lösungen von Differentialgleichungen mit Hilfe von Minimalansätzen. Z. angew. Math. Mech. 21 (1941), S. 310–311.
- [30] Halbebene mit periodisch gewelltem Rand. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 29–33.
- [31] Eingrenzung von Verschiebungen mit Hilfe der Minimalansätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 126–130.
- [32] Eingrenzung von Verschiebungen und Zerrungen mit Hilfe der Minimalansätze. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 130–136.

- [33] Halbraum mit Halbkugelbelastung. Z. angew. Math. Mech. 22 (1942), S. 318—321.
 - [34] G. Niemann: Schneckenriebe mit flüssiger Reibung, mit einem Anhang von C. Weber: Mathematische Ableitungen. VDI-Forsch.-Heft 412. Berlin 1942.
 - [35] Die Hertzsche Gleichung für elliptische Druckflächen. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 94—95.
 - [36] Zur nichtlinearen Elastizitätstheorie. Z. angew. Math. Mech. 28 (1948), S. 189—190.
 - [37] Spannungsfunktionen des dreidimensionalen Kontinuums. Z. angew. Math. Mech. (1948), S. 193—197.
 - [38] Zwei Probleme mit gleicher Lösung. Z. angew. Math. Mech. (1948), S. 371—373.
 - [39] Festigkeitslehre. Wolfenbütteler Verlagsanstalt G. m. b. H. 1947.
 - [40] Schwingungen im Maschinenbau. Wissenschaftliche Verlagsanstalt 1950. (Im Druck.)
 - [41] Zur hydrodynamischen Theorie des Zapfenlagers. Z. angew. Math. Mech. 30 (1950), S. 112—120.
- Dresden. Willers.

Professor Dr. Gerhard Grüss †

Am 20. Mai erlag Dr. Gerhard Grüss, Prof. an der Bergakademie Freiberg, nach langer Krankheit einem Herzschlag. Grüss war am 16. März 1902 als Sohn eines Rektors in Berlin geboren. Er war ein typischer Berliner. Offenbar als Erbe seines Vaters hatte er eine ganz hervorragende didaktische Begabung mitbekommen. Nach Besuch des Humboldt-Gymnasiums studierte er an der Technischen Hochschule Berlin zunächst 4 Semester Bauingenieurwesen, um dann zur Mathematik überzugehen. Nach seinem Diplomexamen 1925 verfaßte er für die Deutsche Versuchsanstalt für Luftfahrtforschung einen Bericht über neuere Arbeiten auf dem Gebiete der Propellertheorie und studierte dann mit einem Stipendium der Technischen Hochschule Berlin noch 1 Semester in Göttingen. Von dort zurückgekehrt wurde er Assistent von Rudolf Rothe, an den er sich schon während seines Studiums eng angeschlossen hatte. In Berlin promovierte er 1927 und habilitierte sich dort 1929. Nachdem er 1934/35 vertretungsweise in Stuttgart über Mechanik gelesen hatte, wurde er 1935 an die Bergakademie Freiberg berufen, an der er bis zu seinem Tode lehrte. Einen Ruf an die Technische Hochschule Dresden (1946) lehnte er ab. In der schwierigsten Zeit des Wiederaufbaues vertrauten ihm seine Kollegen das Rektorat der Bergakademie an. Seine aufopfernde Arbeit in dieser Stellung, seine daneben ausgeübte unermüdete politische Tätigkeit, die er für die Pflicht eines Jeden hielt, und die tägliche Kleinarbeit der Vorlesungen und des Unterrichts, die er in seiner Gewissenhaftigkeit in keiner Weise vernachlässigte, führten zu einer vollständigen Überarbeitung, die wohl mit die Ursache seiner Erkrankung gewesen ist, oder diese doch wesentlich verschlimmert hat.

Seiner von Rothe angeregten Dissertation: „Über Gewebe auf Flächen in dreidimensionalen allgemeinen metrischen Räumen“ schlossen sich eine Reihe von anderen Arbeiten aus dem Gebiet der Differentialgeometrie an. Insbesondere beschäftigte ihn der Parallelismus von Levi-Civita auf allgemeinen metrischen Flächen. Fast all diese Arbeiten sind in den Mathematischen Annalen erschienen. Der Geometrie und zwar der anschaulichen Geometrie ist auch eine seiner späteren Arbeiten gewidmet, in der er Klarheit über den Verlauf der Tangentenflächen einer Raumkurve in der Umgebung einer Stelle mit der Krümmung Null schafft.

Die differentialgeometrischen Arbeiten führten ihn auf Fragen der Variationsrechnung, die er dann in einem ausgezeichneten heute leider vergriffenen Bändchen behandelte. Zu weiteren Arbeiten, z. B. Über vollmonotone Funktionen, Anormale Extremwerte von Funktionen einer Veränderlichen, Über das θ im verallgemeinerten Mittelwertsatz der Integralrechnung, wurde er durch seine Beschäftigung mit der Analysis angeregt.

Grüss hätte kein Schüler von Rothe sein müssen, wenn er sich nicht auch für Probleme der angewandten Mathematik interessiert hätte. So schrieb er eine Arbeit über das Kernsche Planimeter. Ferner beschäftigte er sich, angeregt durch Fragen des VDI, mit dem Gleichgewicht des Spannexzentrums, gab ein elementares Beispiel zur Dyadenrechnung, hielt an der Hochschule für Leibesübungen Vorlesungen über Mechanik. Überhaupt war es die Mechanik, mit der er sich gern beschäftigte; davon zeugt z. B. auch ein kleiner Aufsatz über die Funktionalgleichung der Seilkurven. Später hielt er auch die Vorlesungen über Mechanik an der Bergakademie. Viel Arbeit verwandte er auf das Aufsuchen guter Anwendungsbeispiele und es war ihm immer eine besondere Freude, wenn er gute neuartige Beispiele gefunden hatte. Oft kamen ihm die Anregungen zu seinen Arbeiten aus der Praxis. Das gilt z. B. von der „Über das Maximum des absoluten Betrages von

$$\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) \cdot g(x) dx - \frac{1}{(b-a)^2} \int_a^b f(x) dx \int_a^b g(x) dx''.$$

Ein Fehler, den er in einem ausländischen Aufsatz entdeckte, wurde der Anlaß zu einer Arbeit über Schwerpunktbestimmungen gekrümmter Stäbe beliebigen Querschnittes. Eine solche Anregung aus der Praxis gab auch den Anlaß zu der Arbeit „Ahnenverlust und Inzestgrad — eine kombinatorische Untersuchung“, in der er eine neue Maßzahl für den Inzestgrad entwickelte. In den letzten Jahren, in denen ihn schon seine Krankheit sehr behinderte, beschäftigte ihn in der Hauptsache die Abfassung des vor einem halben Jahr erschienen Leihbuches über Differential- und Integralrechnung. Hierin ist es ihm gelungen, die richtige Mitte zu halten zwischen den Forderungen wissenschaftlicher Strenge der Darstellung und der Verständlichkeit für den Anfänger, daneben aber auch die Näherungsmethoden der praktischen Analysis zu berücksichtigen. In seinem Nachlaß fand sich eine Arbeit über das Rollgleiten, die in dieser Zeitschrift veröffentlicht werden wird.

Über dem Wissenschaftler soll aber nicht der feinsinnige, humorvolle, aufrechte Mensch vergessen werden, der jederzeit für seine Überzeugung eintrat, auch wenn es mit Gefahr für seine Existenz verbunden war, dessen Erscheinen im Kreise der Fachgenossen immer mit besonderer Freude begrüßt wurde. Vergessen soll auch nicht das persönliche gute Verhältnis zu seinen Hörern werden, denen er infolge seines außerordentlichen didaktischen Geschickes verstand, das unbedingt Nötige in kurzen Vorlesungen erfolgreich zu übermitteln, und für deren Nöte und Sorgen er stets Verständnis hatte. Er hatte noch manche Pläne, so hatte er die Neubearbeitung des Bändchens von Rothe über Differentialgeometrie, die seines eigenen Bändchens über Variationsrechnung in Angriff genommen. Ferner hatte er sich bereits Notizen für den 2. Band der Infinitesimalrechnung gemacht. All diesen Plänen hat nun sein frühes Hinscheiden ein Ende gesetzt, allzu früh für alle, die ihn kannten und die ihn nicht vergessen werden.

Dresden.

Willers.

Verantwortlich für den Inhalt: Prof. Dr. Fr. A. Willers, Dresden; für den Verlag: H. Kaesser, Berlin. Verlag: Akademie-Verlag GmbH, Berlin NW 7, Schiffbauerdamm 19, Fernsprecher: Sammelnnummer: 42 55 71. Postscheckkonto: Berlin 35 021. Bestell- und Verlagsnummer dieses Heftes: 1009/30/7. Die Zeitschrift für angewandte Mathematik und Mechanik erscheint monatlich. Bezugspreis: vierteljährlich RM 15.— zuzüglich Bestellgeld. Einzelheft RM 6.—. Abbestellungen können nur bis 4 Wochen vor Quartalsende anerkannt werden, anderenfalls wird das folgende Quartal noch geliefert. Verantwortlich für den Anzeigenteil: Curt F. W. Schreiber, Berlin. Druck: Thüringer Volksverlag Werk II Langensalza. 57 273/4022 — Nr. 531. — Veröffentlicht unter der Lizenz-Nr. 245.